อนุสรณ์ในงานพระราชทานเพลิงศพ

พลอากาศเอก ศาสตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ม.ป.ช., ม.ว.ม.

วันพฤหัสบดีที่ ๑๒ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๓๕

อนุสรณ์
งานพระราชทานเพลิงศพ

พลอากาศเอก ศาสตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ม.ป.ช., ม.ว.ม.

ณ. เมรุ ฌาปนกิจสถาน กองทัพอากาศ
วัดพระศรีมหาธาตุวรมหาวิหาร บางเขน
วันพฤหัสบดีที่ ๑๒ มีนาคม พุทธศักราช ๒๕๓๕

(แบบ ก.)

หมายรับสั่งที่ ๖๑๑๗๙ **สำนักพระราชวัง**

๙ ธันวาคม ๒๕๓๙

พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฉุตราคนี ม.ป.ช.,ม.ว.ม. อายุ ๖๕ ปี ข้าราชการบำนาญ สังกัดกระทรวงกลาโหม กราบถวายบังคมลาถึงอนิจกรรมด้วยโรคไตวาย ณ โรงพยาบาลภูมิพลอดุลยเดช กรุงเทพมหานคร เมื่อวันอาทิตย์ ที่ ๘ ธันวาคม ๒๕๓๙ เวลา ๑๐.๔๕ น.

<u>วันจันทร์ ที่ ๙ ธันวาคม ๒๕๓๙</u> เวลา ๑๘.๓๑ น. ขอรับพระราชทานน้ำหลวงอาบศพ พร้อมด้วยเครื่องเกียรติยศประกอบศพ ณ ศาลา ๕ วัดพระศรีมหาธาตุวรมหาวิหาร เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร

ทรงพระกรุณาโปรดเกล้า ฯ พระราชทานโกศแปดเหลี่ยม ฉัตรเบญจาตั้งประดับเกียรติยศ ปี่ กลองชนะ ประโคมเวลาพระราชทานน้ำหลวงอาบศพ พระพิธีธรรมสวดพระอภิธรรมเวลากลางคืน กำหนด ๓ คืน.

ประณมรัตน์/พิมพ์/ ... /ทาน.

วัน	หน้าที่ พนักงานพระราชพิธี
	นำหมายเรียน เจ้าภาพศพ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฉุตราคนี เพื่อทราบ
	เครื่องประกอบเกียรติยศที่พระราชทานมานี้ และเจ้าพนักงานผู้มาปฏิบัติ เจ้าภาพไม่ต้องเสียค่าใช้จ่ายอย่างใดทั้งสิ้น.

ทั้งนี้ให้จัดการตามหน้าที่และกำหนดวันตามรับสั่งอย่าให้ขาดเหลือ ถ้าสงสัยก็ให้ถามผู้รับรับสั่ง โดยหน้าที่ราชการ

ผู้รับรับสั่ง

(แบบ ก.)

หมายรับสั่งที่ ๓๘๘๗ **สำนักพระราชวัง**

๒๖ กุมภาพันธ์ ๒๕๓๕

พระราชทานเพลิงศพ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ม.ป.ช.,ม.ว.ม. ข้าราชการบำนาญ สังกัดกระทรวงกลาโหม ณ เมรุวัดพระศรีมหาธาตุวรมหาวิหาร เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร

วันพุธ ที่ ๑๑ มีนาคม ๒๕๓๕ เวลา ๑๕.๓๐ น. เจ้าพนักงานจัดการเปลื้องเครื่องสุกำศพลงสู่โกศ ณ ศาลาวัดพระศรีมหาธาตุวรมหาวิหาร ทรงพระกรุณาโปรดเกล้า ฯ พระราชทานโกศแปดเหลี่ยมประกอบศพ ฉัตรเบญจาตั้งประดับ

วันพฤหัสบดี ที่ ๑๒ มีนาคม ๒๕๓๕ เวลา ๑๕.๓๐ น. เชิญโกศศพแห่เวียนเมรุ แล้วเชิญขึ้นตั้งบนจิตกาธาน เวลา ๑๗.๓๐ น. พระราชทานผ้าไตร ๕ ไตรทอดถวายพระสงฆ์บังสุกุล แล้วพระราชทานเพลิง.

ประณมรัตน์/พิมพ์/... /ทาน.

วัน	หน้าที่
	พนักงานพระราชพิธี
	นำหมายเรียน เจ้าภาพศพ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เพื่อทราบ
	เครื่องประกอบเกียรติยศที่พระราชทานมานี้ และเจ้าพนักงานผู้มาปฏิบัติ เจ้าภาพไม่ต้องเสียค่าใช้จ่ายอย่างใดทั้งสิ้น.

ทั้งนี้ให้จัดการตามหน้าที่และกำหนดวันตามรับสั่งอย่าให้ขาดเหลือ ถ้าสงสัยก็ให้ถามผู้รับรับสั่งโดยหน้าที่ราชการ

ผู้รับรับสั่ง

สำนึกในพระมหากรุณาธิคุณ
เป็นล้นเกล้าล้นกระหม่อมหาที่สุดมิได้

เมื่อความทราบฝ่าละอองธุลีพระบาทว่า พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ได้กราบถวายบังคมลาถึงแก่กรรม เมื่อวันที่ ๘ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๓๔ ได้ทรงพระกรุณาโปรดเกล้าฯ พระราชทานน้ำหลวงอาบศพ และโกศทองประกอบศพแปดเหลี่ยมพร้อมทั้งพระราชทานพระบรมราชานุเคราะห์ในการบำเพ็ญพระราชกุศลในการสวดพระอภิธรรมศพ จำนวน ๓ วัน นับเป็นพระมหากรุณาธิคุณล้นเกล้าล้นกระหม่อมหาที่สุดมิได้

ข้าพระพุทธเจ้าทุกคนขอพระราชทานพระบรมราชวโรกาส กราบถวายบังคมแทบเบื้องพระยุคลบาทของล้นเกล้าล้นกระหม่อม ด้วยความจงรักภักดีและสำนึกในพระมหากรุณาธิคุณอันหาที่สุดมิได้

ข้าพระพุทธเจ้า
นางฤดี ฤทธาคนี
นางดวงสมร มารุ่งโรจน์
นาวาอากาศตรีหญิง ศุลีวรรณ รัตนไชย
นางสาวสุทธาวดี ฤทธาคนี
เรืออากาศเอก ฟ้าฟื้น ฤทธาคนี

คำกราบขอบพระคุณ

ในการจากไปของ พล.อ.อ.ศจ.ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เจ้าภาพรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบคุณแก่ท่านผู้ใหญ่ ผู้บังคับบัญชา บรรดาญาติและมิตรสหาย ที่ได้มาร่วมบำเพ็ญกุศลหรือเป็นเจ้าภาพสวดพระอภิธรรมศพ รวมถึงที่ได้ร่วมทำบุญร่วมกับท่าน พล.อ.อ.พิสุทธิ์ฯ ตลอดจนที่ได้มาในงานสวดพระอภิธรรมศพและงานพระราชทานเพลิงศพในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ ท่านผู้ใหญ่ ญาติผู้ใหญ่ ตลอดจนบรรดาเพื่อนฝูงของท่านฯ ที่ได้ให้ความรักความกรุณาต่อท่านฯ ตลอดชั่วชีวิต ๖๕ ปีที่ผ่านมาของท่านฯ

ขอขอบพระคุณ กองทัพอากาศและท่านผู้บัญชาการทหารอากาศ ที่เป็นเสมือนบ้านพักที่อบอุ่นของท่านตลอดชั่วชีวิตและเป็นบ้านพักของตระกูล "ฤทธาคนี" เช่นกัน

ขอขอบพระคุณ คณะแพทย์ พยาบาลและเจ้าหน้าที่โรงพยาบาลภูมิพลอดุลยเดชทุกท่านในการที่ช่วยดูแลรักษาท่าน พล.อ.อ.พิสุทธิ์ฯ ตลอดเวลาที่ป่วยไข้ จนวันสุดท้ายของชีวิต

ขอขอบพระคุณบรรดาลูกศิษย์ของท่านฯ ที่ได้แสดงความเสียใจในการจากไปของท่าน ตลอดจนกระตือรือร้นที่ให้ความช่วยเหลือทุก ๆ ประการเพื่อที่ให้งานศพของท่านฯ สำเร็จด้วยดี

เจ้าภาพ

กำหนดการบำเพ็ญกุศล

วันพุธ ที่ ๑๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๓๕

เวลา ๑๕.๐๐ น. เชิญโกศศพออกตั้งบำเพ็ญกุศล

เวลา ๑๙.๐๐ น. แสดงพระธรรมเทศนา ๑ กัณฑ์

เวลา ๒๐.๐๐ น. สวดพระอภิธรรม

กำหนดการพระราชทานเพลิงศพ

วันพฤหัสบดี ที่ ๑๒ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๓๕

เวลา ๑๐.๓๐ น. พระสงฆ์สวดพระพุทธมนต์

เวลา ๑๑.๐๐ น. ถวายภัตตาหารเพล

เวลา ๑๒.๐๐ น. มาติกา บังสุกุล

เวลา ๑๕.๐๐ น. เชิญโกศศพแห่เวียนเมรุ แล้วเชิญขึ้นตั้งบนจิตกาธาน

เวลา ๑๗.๐๐ น. พระราชทานเพลิง

พลโท เฟื่อ-สงัด ฤทธาคนี (น้า)
ฤดี ฤทธาคนี (ภรรยา)
บุตร-ธิดา น้องและญาติ

พลอากาศเอก ศาสตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

ชาตะ ๑๔ มิถุนายน ๒๔๗๐ ปีเถาะ

มรณะ ๘ ธันวาคม ๒๕๓๔











๑

๒

๕

๓

๔

รูปที่ ๑-๓

สถานศึกษาเฉพาะวิชา

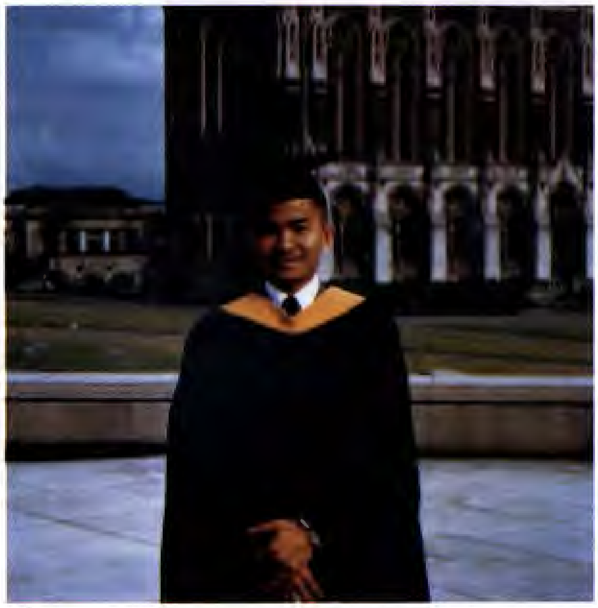
Aero nautical Engineering

(โรงเรียนช่างทหารอากาศ)

รูปที่ ๔ ไปประจวบคีรีขันธ์

รูปที่ ๕ ที่โรงเรียนการบินฯ

๑



๒

๓

๔

รูปที่ ๑ แถวหลังจากซ้ายไปขวา

คุณหญิงสอาดจิตต์ ฤทธาคนี คุณแอร่ม ปลดปรปักษ์

คุณหญิงอุดมลักษณ์ ศรียานนท์ คุณศศิธร พันธุ์กระวี

แถวหน้าจากซ้ายไปขวา

คุณรัชนิบูล พิบูลสงคราม คุณเปล่งศรี ปลดปรปักษ์

คุณจีรวัสส์ พิบูลสงคราม คุณภัทรา พันธุ์กระวี

และคุณพิสุทธิ์ ฤทธาคนี

รูปที่ ๒ ที่ MIT เรียนปริญญาโท

รูปที่ ๓ กลับจากสหรัฐอเมริกา พ.ศ. ๒๕๑๑

รูปที่ ๔ ที่บ้านจอมพลอากาศฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี

ศูนย์คอมพิวเตอร์แห่งกองทัพอากาศ

บริษัทวิทยุการบินแห่งประเทศไทยจำกัด

ดูงานต่างประเทศกับบริษัทวิทยุการบินแห่งประเทศไทยจำกัด

ห้องสมุดส่วนตัว

Aircraft Maintanance School, Chanute Airbase, Illinois, USA

ถ่ายรูปกับทหารญี่ปุ่น

ขณะศึกษาต่อปริญญาโทที่ Massachusetts

โกศบรรจุศพที่วัดพระศรีมหาธาตุฯ

พลโทเฟื้อ-สงัด ฤทธาคนี

งานรดน้ำศพ

คุณแม่ประดับ, ภรรยา, น้อง ๆ, ลูก ๆ และญาติ ๆ




ประวัติ
พลอากาศเอก ศาสตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

เกิด	วันจันทร์ที่ ๑๔ มิถุนายน พ.ศ. ๒๔๗๐ ปีเถาะ
สถานที่เกิด	ตำบล โคกกระเทียม อำเภอ บ้านหมี่ จังหวัด ลพบุรี
บิดา	จอมพลอากาศ ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี
มารดา	คุณหญิงสอาดจิตต์ รณนภากาศ ฤทธาคนี
ปู่	ฟุ้ง ฤทธาคนี
ย่า	พุดตาล ฤทธาคนี
ตา	พันโท พระเริงฤทธิสงคราม
ยาย	อบ ฤทธาคนี
ภรรยา	ฤดี ฤทธาคนี (เคยสมรส และหย่าแล้ว กับ นางวนิดา ประจวบเหมาะ)
ภูมิลำเนาปัจจุบัน	บ้านเลขที่ ๔๖๓/๑ ซ.เขื่อนขัณฑ์ ๑ ถ.พหลโยธิน กม.๒๕ บางเขน กรุงเทพฯ
ครอบครัว	มีบุตรหญิง ๓ คน ชาย ๑ คน ตามลำดับดังนี้

๑. นางดวงสมร มารุ่งโรจน์ จบปริญญาตรีด้านพาณิชยศาสตร์ และการบัญชีจาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และปริญญาโทจาก มหาวิทยาลัยแห่งรัฐเท็กซัส ปัจจุบันทำงานที่ บริษัทเงินทุนหลักทรัพย์ เอกเอเชีย จำกัด

๒. นาวาอากาศตรี หญิง ศุลีวรรณ รัตนไชย จบแพทย์ศาสตร์ศิริราช ปัจจุบันทำงานที่ โรงพยาบาล ภูมิพลอดุลยเดช

๓. นางสาว สุทธาวดี ฤทธาคนี จบปริญญาตรีสังคมศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ปัจจุบันทำงานที่ ฝ่ายช่าง บริษัท การบินไทย จำกัด

๔. เรืออากาศเอก ฟ้าฟื้น ฤทธาคนี จบปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ และปริญญาโทจากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชียปัจจุบันทำงานที่ โรงเรียนนายเรืออากาศ

พี่น้อง

- มีน้องชาย ๓ คน น้องสาว ๑ คน ตามลำดับดังนี้.-

๑) นาวาอากาศตรี ประพัทธ์ ฤทธาคนี

ตำแหน่ง	อาจารย์ รร.นอ.ยศ.ทอ.
การศึกษา	จบปริญญาตรี จาก รร.นอ.สหรัฐฯ ที่โคโรราโด สปริง ปัจจุบันกำลังศึกษาวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์ ระดับปริญญาเอก ที่มหาวิทยาลัยเปอดิว สหรัฐฯ

๒) นาวาอากาศเอก วัชระ ฤทธาคนี เหล่านักบิน

ตำแหน่ง	ผู้อำนวยการกองฝึกร่วมและผสม ยก.ทอ.
การศึกษา	จบจากโรงเรียนนายร้อยแซนด์ เฮิร์ท ประเทศอังกฤษ

๓) นายวรฤทธิ์ ฤทธาคนี
- เรียนที่มหาวิทยาลัยศิลปากร
- จบการศึกษาจากวิทยาลัยศิลป ที่ บราวสวากด์ ประเทศเยอรมันตะวันตก
- ปัจจุบันเป็นจิตรกรอิสระ

๔) น.ส.ธนิดา ฤทธาคนี
- จบปริญญาตรี สาขาอักษรศาสตร์ ที่ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- จบปริญญาโท จากมหาวิทยาลัยมิชิแกน สเตทท์ สหรัฐอเมริกา
- ปัจจุบัน ทำงานที่ บริษัท การบินไทย จำกัด

การศึกษา

๑) การศึกษาขั้นต้น
- โรงเรียนวัดราชบพิตร
- โรงเรียนวชิราวุธวิทยาลัย (๒๔๘๔)

๒) การศึกษาในโรงเรียนทหาร
- โรงเรียนเตรียมนายร้อยทหารบก
- โรงเรียนเท็คนิคทหารบก (๒๔๙๒)
- โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า (จำพวกช่างอากาศ)
- โรงเรียนการบินกองทัพอากาศ
- โรงเรียนนายทหารชั้นผู้บังคับฝูง กองทัพอากาศสหรัฐ
(Squadron Officer School, Maxwell AFB, Alabama)
- โรงเรียนนายทหารซ่อมบำรุงอากาศยาน กองทัพอากาศสหรัฐ
(Aircraft Maintenance Officer Course, Chanute AFB, Illinois)
- โรงเรียนเสนาธิการทหารอากาศ
- วิทยาลัยป้องกันราชอาณาจักร

๓) การศึกษาในมหาวิทยาลัย
- จบปริญญาโท วิศวกรรมอากาศยาน (M.Sc.in Aeronautical Engineering) จาก University of Washington, Seattle U.S.A.
- จบปริญญาโท วิศวกรรมอากาศยาน (S.M.Aeronautics and Astronautics) และ ปริญญาโท วิศวกรรมวัสดุ (Material Engineer) จาก Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.), Massachusetts U.S.A.
- จบปริญญาเอก วิศวกรรมเครื่องกล (Ph.D.Mechanical Engineering). จาก University of Maryland, College Park, Maryland U.S.A.

ลำดับชั้นยศ

- นักเรียนนายร้อย	๑ มิ.ย. ๒๔๘๗
- ศิษย์การบิน (รร.การบิน)	๑๕ ต.ค. ๒๔๙๒
- ว่าที่เรืออากาศตรี	๑ พ.ค. ๒๔๙๒
- เรืออากาศตรี	๑ ม.ค. ๒๔๙๓

- เรืออากาศโท ๑ ม.ค. ๒๔๙๔
- ว่าที่นาวาอากาศตรี ๕ มี.ค. ๒๔๙๘
- นาวาอากาศตรี ๕ มี.ค. ๒๔๙๘
- นาวาอากาศโท ๑ ม.ค. ๒๕๐๒
- ว่าที่นาวาอากาศเอก ๓๐ ก.ค. ๒๕๑๑
- นาวาอากาศเอก ๑ ต.ค. ๒๕๑๑
- พลอากาศตรี ๑ เม.ย. ๒๕๑๖
- พลอากาศโท ๑๒ มิ.ย. ๒๕๒๔
- พลอากาศเอก ๑ ต.ค. ๒๕๒๘

การปฏิบัติราชการ

- อาจารย์โรงเรียนนายเรืออากาศ
- ศาสตราจารย์ โรงเรียนนายเรืออากาศ
- ผู้อำนวยการกองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ
- ผู้บัญชาการศูนย์วิจัยระบบและคำนวณฯ
- ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนาการกองทัพอากาศ และรรก.ผู้บัญชาการศูนย์วิจัยระบบและคำนวณสถาบันและพัฒนาการกองทัพอากาศ
- ที่ปรึกษากองทัพอากาศ
- ผู้บัญชาการศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ
- ผู้ช่วยผู้บัญชาการกองทัพอากาศ
- สมาชิกวุฒิสภา

เครื่องราชอิสสริยาภรณ์ และเหรียญฯ

เครื่องราชอิสสริยาภรณ์ชั้นสูงสุด

- มหาวชิรมงกุฎ (มวม.) ๕ ธันวาคม ๒๕๒๕
- มหาปรมาภรณ์ช้างเผือก (มปช.) ๕ ธันวาคม ๒๕๒๙

เหรียญฯ

- เหรียญชัยสมรภูมิ (มหาเอเชียบูรพา) ๖ ธันวาคม ๒๕๑๒
- เหรียญพิทักษ์เสรีชนชั้นที่ ๒ ๑๑ พฤศจิกายน ๒๕๑๗
- เหรียญความสามารถในการทำหน้าที่สรรพาวุธชั้นที่ ๑ ๓๑ มีนาคม ๒๕๒๖
- เครื่องหมายความสามารถในการถ่ายรูปทางอากาศชั้นที่ ๑ ๑๙ ธันวาคม ๒๕๒๘
- เครื่องหมายความสามารถในการทำหน้าที่ช่างอากาศชั้นที่ ๑ ๑๘ สิงหาคม ๒๕๒๙

ราชการสนามที่สำคัญ

เคยปฏิบัติหน้าที่ในการวิจัยการรบ และประเมินค่าสมรรถนะการรบของกองทัพอากาศในพื้นที่

เขาภูพาน ในหน้าที่นักบินที่ ๒ กับเครื่องบินแบบ.-

- OV-10
- A-37B
- AU-23A (Peace Maker)

ได้รับพระราชทานเหรียญพิทักษ์เสรีชน ชั้น ๒

งานวิจัยที่สำคัญ

๑) ร่วมโครงการพัฒนาอากาศยาน แบบ บ.ทอ.๒ และแบบ บ.ทอ.๕ โดยทำหน้าที่วิเคราะห์และสร้างแผนแบบจนถึงการผลิตเครื่องบินต้นแบบ

๒) ร่วมโครงการพัฒนาจรวดเห่าฟ้าของกองทัพอากาศ ตั้งแต่ระดับห้องทดลองที่โรงเรียนนายเรืออากาศจนถึงขั้นโรงงานต้นแบบที่สำนักงานพัฒนาการสร้างระบบอาวุธ กองทัพอากาศ

๓) ร่วมโครงการพัฒนาเครื่องบินลำเลียงติดอาวุธ (Gunship) โดยใช้เครื่องบินแบบ AC-47 ติดปืนใหญ่อากาศ ขนาด ๒๐ มม. เริ่มตั้งแต่การคำนวณ วิถีกระสุน, การปรับศูนย์ และถึงขั้นทดสอบใช้งานในอากาศในฐานะนักบินที่ ๒ จนสามารถใช้งานทางยุทธการได้สมบูรณ์

๔) ร่วมงานวิจัยกับ Atomic Energy Commission ที่มหาวิทยาลัยแมรี่แลนด์ (University of Maryland) ทำการวิจัยในด้านวัสดุและโลหะวิทยา ผลงานวิจัยได้รับพิจารณาจัดพิมพ์ในวารสารหลายฉบับ เช่น Journal of Applied Physies และอื่น ๆ รวม ๓ เรื่อง

งานพิเศษ

๑) เคยเป็นอาจารย์พิเศษ สอนนักศึกษาระดับปริญญาโท คณะวิทยาศาสตร์, วิศวกรรมศาสตร์ และคอมพิวเตอร์ศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

๒) เคยเป็นอาจารย์พิเศษ สอนนักศึกษาระดับปริญญาโท คณะวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

UNITED STATES AIR FORCE
AIR UNIVERSITY
HEADQUARTERS
AIR COMMAND AND STAFF SCHOOL
MAXWELL AIR FORCE BASE, ALABAMA

6 August 1953

C E R T I F I C A T E

TO WHOM IT MAY CONCERN:

This is to certify that Lieutenant Bisuddhi Riddhagni, Royal Thai Air Force, has been awarded the Air University Insignia by the United States Air Force in recognition of his graduation from the Squadron Officer Course of the Air Command and Staff School.

Russell V. Ritchey

RUSSELL V. RITCHEY
Colonel, USAF
Director, General Courses

Sigma Gamma Tau

NATIONAL HONORARY AERONAUTICAL ENGINEERING SOCIETY

Having shown interest in the advancement of and proficiency in the Aeronautical sciences, and having been duly elected by the society,

Bisuddhi Riddhagni

is awarded membership in Sigma Gamma Tau and is granted all the honors, insignia and privileges of the Society

given this twenty ninth day of April A. D. 1954 at

Massachusetts Institute of Technology

Harry H. Hilton

NATIONAL SECRETARY-TREASURER

Warren H. Westheid

CHAPTER PRESIDENT

SIKORSKY AIRCRAFT

DIVISION OF UNITED AIRCRAFT CORPORATION

BRIDGEPORT I, CONNECTICUT

October 18, 1954

To Whom it May Concern:

Bisuddhi Riddhagni has received 19:25 hrs. of dual time and 3:05 hrs. of solo time during flight training in the Sikorsky S-55 Model helicopter. He showed satisfactory proficiency for solo flight but it is recommended that he receive additional time before becoming operational.

D. D. Viner
Chief Test Pilot

DDV:hmm

DEPARTMENT OF METALLURGY

Room 8-106
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS 02139

June 2, 1966

TO WHOM IT MAY CONCERN

B. RIDDHAGNI is an attentive, courteous and conscientious student. He attended the Metallurgy Department's Junior Thermodynamics course, which I helped teach, and gained an A grade.

Yours faithfully,

D. J. Fray

D. J. Fray
Assistant Professor of
Metallurgy

DJF:bw

United States Air Force

Air Training Command

Be it known that

1ST LT BISUDDHI RIDDHAGNI
(THAILAND AIR FORCE)

has satisfactorily completed the prescribed course of instruction of the Air Training Command specializing in

AIRCRAFT MAINTENANCE OFFICER

In testimony whereof and by virtue of vested authority we do confer upon him this

CERTIFICATE OF PROFICIENCY

Given at CHANUTE AF BASE, ILLINOIS

on this EIGHTH *day of* JULY

in the year of our Lord one thousand nine hundred and FIFTY-TWO

Attest:

ROBERT W. FREY
MAJ, USAF
SECRETARY

B. E. GATES
MAJ GEN, USAF
COMMANDANT

80-47-TC/Scott AFB, Ill./12 Jan 50/15M

บทร้อยกรองแสดงความยินดีและอวยพรพอสังเขป.

เนื่องในวาระที่เวียนมาถึงวันคล้ายวันเกิดอีกครั้งหนึ่ง และในการที่ลูกจะได้รับพระราชทานยศเป็นพลอากาศตรี จึงขอแสดงความยินดีและอวยพรด้วยบทร้อยกรองดังนี้ :-

สิบสี่มิถุนานี่นี้ นิมิตดี อีกเฮย
คล้ายวันเกิด พิสุทธิ์ ฤทธาคนี แน่แล้ว
กอปร เกียรติ พลอากาศตรี ไท้เทิด ประทานมา
เสมือนหนึ่ง "แก้ว" เพริศแพร้ว ลูกได้ดั่งประสงค์

อายุ ยืนยิ่งร่วมร้อย รอบปี - เถาะฮา
วรรณะ ผ่องพ้องดวงดี เด่นด้าว
สุขะ ควบคู่บารมี* มั่นยศ ใหม่นา
พละ ดั่งจรวดฤทธิ์กร้าว กราดเสี้ยนศัตรูสลาย

หมายเหตุ. บารมี หมายถึงคุณความดีที่ควรบำเพ็ญ ๑๐ อย่าง.-
ทาน, ศีล, บวช, ปัญญา, วิริยะ, ขันติ, สัจจะ, อธิฏฐาน, เมตตา และอุเบกขา.

๒ ซอยประชาอุทิศ, ถนนปฏิพัทธ์
กรุงเทพมหานคร ๔
๑๔ มิถุนายน ๒๕๑๖

ที่ ๑/๑๖

๒ ซอยประชาอุทิศ ถนนปฏิพัทธ์
สามเสนใน, อ.พญาไท
กรุงเทพมหานคร ๔.

วันที่ ๑๔ มิถุนายน ๒๕๑๖

เรื่อง แสดงความยินดีและอวยพร

ถึง ศาสตราจารย์ นาวาอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ลูกที่รัก

ตามที่ทราบโดยทั่วกันแล้วว่า จะได้ทรงพระกรุณาโปรดเกล้าฯ พระราชทานเลื่อนยศ พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ลูกที่รัก เป็นพลอากาศตรี ประมาณกลางปี ๒๕๑๖ นี้นั้น ก็เพราะ ลูกได้แสดงความรู้ความสามารถปฏิบัติการให้สำเร็จภารกิจด้วยดีเสมอมา และเฉพาะอย่างยิ่ง ความรู้ในทางวิชาการ พิสุทธิ์ ก็ได้รับปริญญาสูงสุดถึงขั้นด๊อกเตอร์ (Doctor of Philosophy) รวมทั้ง ได้รับพระราชทานตำแหน่งเป็นศาสตราจารย์ในกองทัพอากาศเป็นคนแรกเมื่อปี ๒๕๑๕ ซึ่งตำแหน่งนี้หาได้ยากใน ๓ เหล่าทัพ นับเป็นเกียรติประวัติอันดีงามสำหรับตระกูล "ฤทธาคนี" ของเราอย่างหาที่เปรียบมิได้

อนึ่ง การที่ได้รับพระมหากรุณาในเกียรติ อันสูงนี้ เผอิญใกล้วาระกับวันคล้ายวันเกิดของลูก ที่เวียนมาบรรจบครบรอบอีกครั้งหนึ่งใน ๑๔ มิถุนายน ๒๕๑๖ นี้ จึงจัดว่าเป็นอุดมมงคลโชคชัยชั้นเยี่ยม ซึ่งนาน ๆ แต่ละบุคคลผู้มีบุญจะได้รับประสพการณ์เช่นนี้สักครั้งหนึ่ง

ดังนั้น ในโอกาสอันเป็นอุดมมงคลนี้ พ่อ, ประดับและทุก ๆ คน ณ ที่นี้ ขอแสดงความยินดีด้วยจริงใจ และขออวยพรโดยอัญเชิญ คุณบารมี พระศรีรัตนตรัยกับเทพยเจ้าทั้งหลายในสากลโลก จงอภิบาลรักษาให้ ลูก, พลอากาศตรี พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เจริญด้วย อายุ วรรณ สุขะ พละ ปฏิภาณ และธนสารสมบัติ มากมียิ่ง ๆ ขึ้นไป เพื่อเป็นกำลังช่วยพัฒนากองทัพอากาศและบ้านเมืองของเราให้รุ่งเรืองก้าวหน้าสถาพรสืบไป

ด้วยความรักอย่างยิ่ง

จอมพลอากาศ

(ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี)

บ้าน "สว่างจิตต์"
๑ ข. ถนนพหลโยธิน ๖๓ กท. ๑๐๒๒๐
โทร. ๕๒๑๐๑๐๖, ๕๒๑๐๘๓๘

คุณพิสุทธิ์ หลานรัก

เมื่อท่านจอมพลอากาศ ฟื้น ร.ฤทธาคนี ก่อตั้งโรงเรียนนายเรืออากาศขึ้นมา ผู้ที่ร่วมงานกับท่านแต่เริ่มแรก ทราบดีว่ามีความลำบากเพียงไร ที่จะผลิตนายทหารหลักของกองทัพให้มีปริญญาทัดเทียมกับสถาบันอุดมศึกษาระดับเดียวกัน ทั้งฝ่ายทหาร และพลเรือน

ใคร ๆ ก็ทราบว่าเรามีขีดความสามารถที่จะทำได้ แต่ที่จะให้ทุกวงการยอมรับว่า ปริญญาของเราไม่น้อยหน้าใคร สิ่งสำคัญประการหนึ่ง คือ ความยอมรับนับถือในตัวอาจารย์

เมื่อเราเปิดโรงเรียนนายเรืออากาศขึ้นนั้น จำนวนผู้สำเร็จปริญญาโท และปริญญาเอกในสาขาวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ ยังมีน้อย กองทัพอากาศตั้งเป้าหมายไว้ว่า อย่างน้อยอาจารย์หัวหน้าวิชาจะต้องมีปริญญาโท และผู้บังคับกองศึกษา (ตำแหน่งในขณะนั้น) จะต้องมีปริญญาเอก

เราได้ด๊อกเตอร์ พล.อ.จ.สวัสดิ์ ศรีสุข จากอังกฤษ มาเริ่มวางรากฐานทางวิชาการ แต่ก็ยังมีเสียงเรียกร้องอยากได้อาจารย์ที่สำเร็จมาจากโรงเรียนทหาร ซึ่งขณะนั้นไม่ทราบว่าจะหามาได้จากที่ไหน

คุณพิสุทธิ์จึงถูกขอร้องให้เสียสละ เลิกเอาดีทางฝ่ายบู๊ หรือทางการบิน ตามเยี่ยงอย่างท่านบิดา หันมาศึกษาต่อ เพื่อทำปริญญาชั้นสูง แล้วมาเป็นอาจารย์หลักในโรงเรียนนายเรืออากาศ ถึงแม้จะไม่มีโอกาสได้โลดโดดเด่นเหมือนท่านบิดา แต่ก็เป็นการสานต่องานที่ท่านเริ่มเอาไว้เพื่อศักดิ์ศรีของกองทัพอากาศ

คุณพิสุทธิ์เต็มใจรับงานนี้ และก็ทำได้ดี โดยสำเร็จปริญญาโท และปริญญาเอก จากสหรัฐอเมริกาในเวลาไม่นานนัก กลับมาเป็นอาจารย์ เริ่มปรับปรุงหลักสูตร วางรากฐานการศึกษาอันทันสมัย และมั่นคงขึ้นในโรงเรียนนายเรืออากาศ ทั้งเป็นผู้บุกเบิกให้ผู้สำเร็จการศึกษาจากโรงเรียนนายเรืออากาศ ได้ไปทำปริญญาชั้นสูงต่อในต่างประเทศได้เลย โดยไม่ต้องไปตั้งต้นใหม่

สิ่งที่คุณพิสุทธิ์ทำให้กองทัพอากาศมีมากมายหลายอย่างเจริญรอยตามท่านบิดา แต่ที่สำคัญกว่าอื่นก็คือ งานที่ทำให้โรงเรียนนายเรืออากาศ ในด้านวิชาการจนเป็นที่ยอมรับนับถืออย่างกว้างขวางทั้งในประเทศและต่างประเทศ มหาวิทยาลัยชั้นนำในยุโรปและอเมริกายอมรับให้บัณฑิตจากโรงเรียนนายเรืออากาศ เข้าทำปริญญาโท และปริญญาเอกต่อโดยไม่มีเงื่อนไขหลายท่านสำเร็จกลับมาเป็นศาสตราจารย์ และอาจารย์อยู่ในปัจจุบัน

การจากไปของคุณพิสุทธิ์ ไม่แต่จะยังความอาลัยให้เกิดแก่ญาติสนิทมิตรสหายเท่านั้น บรรดาผู้เคยร่วมงาน รวมทั้งศิษย์ ซึ่งบัดนี้เป็นนายทหารชั้นนายพลมากมาย เป็นพลอากาศเอกก็หลายท่าน ต่างรู้สึกว่าได้สูญเสียนักวิชาการ และอาจารย์ผู้ยิ่งใหญ่ไปก่อนเวลาอันสมควร

คุณพิสุทธิ์ไม่แต่จะเป็นนายทหารที่ดีของกองทัพเท่านั้น แต่ได้เป็นปูชนียบุคคลของศิษย์เก่าโรงเรียนนายเรืออากาศทุกคน

ผมรู้จักคุ้นเคยกับคุณพิสุทธิ์อย่างญาติสนิทมาตั้งแต่คุณพิสุทธิ์ยังเป็นเด็กนักเรียน และได้จับตามองด้วยความชื่นชมตลอดเวลา ได้เห็นความก้าวหน้าในทางราชการจนเป็นด๊อกเตอร์ เป็นศาสตราจารย์ เป็นพลอากาศเอก ถึงแม้จะเสียใจ และเสียดายในการจากไปของคุณพิสุทธิ์สักเพียงใด ก็ภูมิใจว่าคุณพิสุทธิ์ได้รับใช้ประเทศชาติ และกองทัพ สมศักดิ์ศรีที่เป็นบุตรชายคนใหญ่ของแม่ทัพอากาศผู้ยิ่งใหญ่ที่สุดที่เมืองไทยเคยมี

จงไปดี ไปสว่างเถิดหลานรัก คุณพ่อ และวีรชนคนไทย รอรับอยู่ในสุคติภพแล้ว พวกเราโดยเฉพาะทหารอากาศ จะไม่มีวันลืมผลงาน และคุณงามความดีของหลาน ผู้เป็นลูกที่ดีของคุณพ่อ เพื่อนที่ดีของทุกคน และอาจารย์ผู้ยิ่งใหญ่ของบรรดาศิษย์ กุศลจิตของพวกเราจะเป็นพลวปัจจัยให้ พลอากาศเอกพิสุทธิ์ ฤทธาคนี หลานรักของอา ไปสู่สุคติภพโดยแน่นอน

พล.อ.อ.

คำไว้อาลัย
ของ
พลอากาศเอก พะเนียง กานตรัตน์

ผมได้รับทราบข่าวการถึงแก่กรรมของพลอากาศเอกพิสุทธิ์ ฤทธาคนี ในขณะที่กำลังจะออกรอบเล่นกอล์ฟที่สนามธูปะเตมีย์จากเพื่อนนายทหารอากาศในวันรุ่งขึ้น รู้สึกตกใจเมื่อได้รับทราบข่าวนี้ แม้จะทราบว่าสุขภาพของพลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ จะไม่ใคร่ดีนักแต่ก็ได้ให้นายแพทย์ดูแลรักษาอยู่อย่างใกล้ชิด จึงไม่คิดว่าจะถึงแก่กรรมรวดเร็วเช่นนี้

พลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ เคยเป็นศิษย์การบิน ของโรงเรียนการบินในสมัยที่ผมรับราชการเป็นผู้อำนวยการฝึกอยู่ จึงมีความใกล้ชิดกันมากเป็นพิเศษ การปกครองศิษย์การบินในขณะนั้นมีความยุ่งยากพอสมควร เนื่องจากจำนวนศิษย์การบินมีมากกว่าผู้บังคับบัญชามาก อย่างไรก็ตาม พลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ เป็นนายทหารที่มีความประพฤติดี เรียบร้อยอยู่ในระเบียบวินัยอย่างเคร่งครัดตลอดเวลา จึงไม่เป็นที่หนักใจของผู้บังคับบัญชาแต่อย่างใด และยังเป็นที่รักใคร่ของเพื่อนฝูงในรุ่นเดียวกันอีกด้วย ผมเองก็อ้างความประพฤติดี เรียบร้อย และรักษาระเบียบวินัยอย่างดีของพลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ ให้เป็นตัวอย่างแก่ศิษย์การบินฯ เพื่อยึดถือปฏิบัติตามอยู่บ่อย ๆ

หลังจากพลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ จบการศึกษาจากโรงเรียนการบินแล้ว ก็ห่างเหินกับผมไปบ้าง ผมเองก็ย้ายจากโรงเรียนการบินไปสังกัดต่างหน่วยกับของ พลอากาศเอกพิสุทธิ์ แต่ก็ได้รับทราบว่าพลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ ได้ใช้ความรู้ความสามารถที่ได้จากการศึกษาในต่างประเทศจนจบปริญญาเอกในต่างประเทศให้เป็นประโยชน์แก่การศึกษาของโรงเรียนนายเรืออากาศ และแก่กองทัพอากาศเป็นส่วนรวมอย่างมากจนเป็นที่ยอมรับของสถาบันการศึกษาอื่น ๆ ทั้งในประเทศ และต่างประเทศเป็นอย่างมาก ผมเองก็รู้สึกภาคภูมิใจแทน พลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ ในเรื่องนี้เป็นอย่างยิ่ง

ในทางส่วนตัวนั้น พลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ ได้กรุณาแนะแนวทางการศึกษาให้แก่ บุตรชายคนเล็กของผม ก่อนไปศึกษา และขณะที่กำลังศึกษาอยู่ในประเทศเยอรมันนีอยู่ตลอดเวลาและบุตรชายของผมได้ยึดถือคำแนะนำนั้นเป็นแนวทางในการเลือกศึกษา และกลับมารับราชการในกองทัพอากาศจนกระทั่งปัจจุบันนี้

การจากไปของพลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ ในครั้งนี้ ซึ่งเป็นที่อาลัยอาวรณ์แก่ผู้ใกล้ชิด และเคยได้รับการช่วยเหลือแนะนำ และถ่ายทอดวิชาความรู้จาก พลอากาศเอกพิสุทธิ์ฯ เป็นอย่างมาก ผมขอให้คุณความดีทั้งหลายที่ พลอากาศเอกพิสุทธิ์ได้กระทำไว้ โดยเฉพาะที่กองทัพอากาศได้รับ จะเป็นมหากุศลส่งเสริมดวงวิญญาณ ให้ไปสู่สุคติในสัมปรายภพด้วยเถิด

ไว้อาลัย
พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

เมื่อ พ.ศ. ๒๔๘๕ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ได้เข้าเรียนโรงเรียนเตรียมทหารบกรุ่นเดียวกับผม เป็นที่ทราบทั่วกันในหมู่เพื่อนฝูงว่า พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ สมองดี เรียนหนังสือเก่งสอบได้อันดับต้น ๆ ของรุ่นตลอดมา จึงเป็นที่พึ่งพาอาศัยของเพื่อนฝูงในการช่วยทบทวนวิชาต่าง ๆ อยู่เสมอ โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิชาคำนวณซึ่ง พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ เก่งมาก

ต่อมา พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ได้แยกไปเป็นนายทหารอากาศ และได้ไปศึกษาต่อยังต่างประเทศจนสำเร็จปริญญาเอก และได้รับรางวัลเรียนดีเด่นจากมหาวิทยาลัย ซึ่งน้อยคนนักที่จะได้รับรางวัลเช่นนี้ ทั้ง พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ เป็นคนเดียวของรุ่นที่ได้ศึกษาต่อจนได้ปริญญาเอก

นอกเหนือไปจากความรู้ทางวิชาการอย่างโดดเด่นแล้ว พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ เป็นคนร่าเริง สนุกสนานเสมอ ตั้งแต่เป็นนักเรียนเตรียมทหารบกด้วยกัน จนกระทั่งออกรับราชการและได้มาเรียนร่วมกันอีกในวิทยาลัยป้องกันราชอาณาจักรรุ่นที่ ๑๖ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ มีบุคคลิกภาพเสมอต้นเสมอปลาย

ด้วยความเป็นเลิศทางวิชาการนี้เอง ทำให้ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ต้องเป็นกำลังสำคัญยิ่งของโรงเรียนนายเรืออากาศ ด้วยการเป็นอาจารย์ประจำ และเมื่อพ้นหน้าที่ประจำแล้ว ต้องวนเวียนมาสอนที่โรงเรียนนายเรืออากาศอยู่เสมอ เป็นเหตุให้นายทหารรุ่นหลัง ๆ เรียกพลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ว่าอาจารย์จนติดปาก

ด้วยความรู้ ความสามารถ มานะ อดทน และอุทิศตนทำงานเพื่อส่วนรวมอย่างแท้จริง ประกอบกับอัธยาศัยสุภาพ อ่อนโยน ไม่เคยทนงตนว่าเป็นบุตรจอมพลอากาศ ผู้บัญชาการทหารอากาศทำให้ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ได้รับความรักใคร่จากผู้รู้จักคุ้นเคย มิตรสหาย และเป็นที่เคารพรักของผู้ใต้บังคับบัญชาและสานุศิษย์ ทำให้งานทั้งปวงในความรับผิดชอบดำเนินไปด้วยดี สามารถสร้างความเจริญก้าวหน้าเป็นอย่างมากให้แก่กองทัพอากาศ จนส่งผลได้เป็นถึงผู้ช่วยผู้บัญชาการทหารอากาศในที่สุด

การถึงอนิจกรรมของ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ทำให้ผม ผู้ที่เคยร่วมงานตลอดจนผู้ที่รู้จักคุ้นเคยมีความเสียใจ และอาลัย ที่ต้องสูญเสียนายทหารผู้ใหญ่ที่เคยทำคุณประโยชน์ให้กับกองทัพไทย และประเทศชาติไปท่านหนึ่ง

ขออำนาจแห่งคุณงามความดีที่ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ได้ประกอบไว้ ดลบรรดาลให้ดวงวิญญาณของ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ฯ ประสพความสุขตามควรแก่คติวิสัย ในสัมปรายภพทุกประการ

พลเอก ท. ศิริสัมพันธ์

(เทียนชัย สิริสัมพันธ์)

คำไว้อาลัย

ของ

พลอากาศเอก เกษตร โรจนนิล ผู้บัญชาการทหารอากาศ

แด่

พลอากาศเอก ศาตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

เมื่อผมเป็นนักเรียนนายเรืออากาศ พลอากาศเอก ศาตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นอาจารย์สอนวิชาอากาศพลศาสตร์ และวิชาต่าง ๆ เกี่ยวกับระบบคำนวณในโรงเรียนนายเรืออากาศ ผมจึงรู้จักท่านในฐานะลูกศิษย์และเรียกท่านว่า "อาจารย์" ด้วยความเคารพและนับถือมาตั้งแต่บัดนั้นจนกระทั่งท่านถึงแก่กรรม เมื่อผมจบและออกรับราชการแล้ว ก็ยังมีโอกาสพบปะกับท่านเป็นครั้งคราว จนกระทั่งท่านเจริญก้าวหน้าทางราชการ ได้ดำรงตำแหน่ง ผู้ช่วยผู้บัญชาการทหารอากาศ

ผมขอแสดงความเสียใจและอาลัยกับครอบครัวของ พลอากาศเอก ศาสตรจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นอย่างยิ่งมา ณ ที่นี้ด้วย

พลอากาศเอก ศาสตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นบุคคลที่สนใจทางด้านวิชาการเป็นอย่างมาก และได้ปฏิบัติหน้าที่ในราชการกองทัพอากาศด้วยความรู้ความสามารถอย่างดียิ่ง ท่านได้อุทิศตนปฏิบัติหน้าที่เพื่อสร้างสรรค์และพัฒนากองทัพอากาศให้เจริญก้าวหน้าทันต่อเทคโนโลยีที่ทันสมัย และยังเป็นผู้บังคับบัญชาที่มีความสามารถสูง มีจิตใจโอบอ้อมอารีต่อผู้ใต้บังคับบัญชาโดยยุติธรรมสม่ำเสมอ

ขอกุศลผลบุญที่พลอากาศเอก ศาสตราจารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ได้บำเพ็ญมาโดยตลอด ประกอบกับที่ครอบครัว และบรรดาญาติมิตรได้บำเพ็ญให้ จงเป็นผลส่งให้ดวงวิญญาณของพลอากาศเอก ศาสตรา-จารย์ ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ไปสู่สุคติ ณ สัมปรายภพ เทอญ

พลอากาศเอก

(เกษตร โรจนนิล)

ผู้บัญชาการทหารอากาศ

คำไว้อาลัย
พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นบุตรของพี่สาวของข้าพเจ้า ดังนั้นข้าพเจ้าจึงใกล้ชิดและคุ้นเคยมาแต่เยาว์วัย ถึงแม้ว่าข้าพเจ้าจะรับราชการในต่างจังหวัด แต่ก็มีโอกาสพบปะปีละ ๓ - ๔ ครั้ง ได้สังเกตุเห็นว่าเป็นผู้ที่ใฝ่ใจในการศึกษา ชอบสะสม และศึกษาหนังสือต่าง ๆ สามารถอธิบายความเข้าใจให้ฟังได้อย่างถูกต้อง เมื่อจบการศึกษาชั้นมัธยมปีที ๖ ได้เข้าศึกษาในโรงเรียนเตรียมทหารบก รุ่นที่ ๕ และเข้าศึกษาในโรงเรียนเท็คนิคทหารบก จบการศึกษาเมื่อต้นปี ๒๔๘๒ เข้ารับราชการในกองทัพอากาศ จำเริญรอยตามท่านบิดาอยู่ชั่วระยะหนึ่ง ด้วยความใฝ่ใจในการศึกษา จึงได้ลาไปศึกษาขั้นมหาบัณฑิต และดุษฎีบัณฑิตตามลำดับ หลังจากได้รับปริญญาดุษฎีบัณฑิต จากสหรัฐอเมริกากลับมาแล้ว ก็ได้ใช้ชีวิตในการสอนเกือบตลอดเวลาที่รับราชการ และได้เลื่อนตำแหน่งและยศจนถึงผู้ช่วยผู้บัญชาการทหารอากาศ

ในทางส่วนตัว พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นผู้ที่ให้ความเคารพในญาติผู้ใหญ่ และเอื้อเฟื้อเกื้อกูลญาติผู้เยาว์เป็นอย่างดี สม่ำเสมอตลอดมา

พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ได้ประกอบกรรมดีมาตลอดเวลา จึงเป็นที่น่าเสียดายที่ต้องจากไป หลังจากเกษียณอายุไม่นาน

ขอให้คุณความดีที่ได้ปฏิบัติมาและกุศลผลบุญที่ได้บำเพ็ญมา และที่ญาติบิดรบำเพ็ญให้จงเป็น พละปัจจัยส่งเสริมให้วิญญาณของ พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ได้เสวยสุขในคติสัมปรายภพชั่วนิรันดร.

พลโท

(เฟื่อ ฤทธาคนี)

อาลัยรัก พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

ผมกับพิสุทธิ์เป็นพี่น้องที่เกือบจะเหมือนคลานตามกันมา เพราะนอกจากเราจะเป็นพี่น้องที่ใกล้ชิดกันแล้ว เรายังมีความรักและผูกพันกันมาเป็นพิเศษตั้งแต่เล็ก ๆ เราเติบโตขึ้นมาพร้อมกัน และรับราชการในสาขาอาชีพทหารอย่างเดียวกันเมื่อเติบใหญ่ พิสุทธิ์เป็นคนที่รักพี่รักน้อง และรักเพื่อนฝูง ถ้าหากทำอะไรให้ใครได้ ก็ยินดีจะทำให้ด้วยความเต็มใจและตั้งใจจริงจนแทบจะกล่าวได้ว่า พิสุทธิ์มักจะทำตัวเป็น “ผู้ให้” ...และพร้อมที่จะช่วยเหลือสนับสนุนเพื่อนฝูงทุกคนในสิ่งต่าง ๆ เท่าที่จะทำได้อยู่เสมอ โดยมิได้หวังผลตอบแทนแต่อย่างใด

พิสุทธิ์รับราชการเป็นนายทหารด้านวิชาการ ที่มีความรู้ความสามารถเป็นอย่างสูงคนหนึ่งในกองทัพอากาศ พิสุทธิ์มีลูกศิษย์ลูกหามากมาย เพราะเป็นผู้ที่มีส่วนร่วมอย่างสำคัญคนหนึ่ง ในระยะแรกของการก่อตั้งโรงเรียนนายเรืออากาศ ในฐานะที่เป็นอาจารย์สอน “ระบบคำนวณและวิทยาศาสตร์ประยุกต์” ของโรงเรียน ที่ลูกศิษย์ทั้งหลายมีความรักใคร่ และภาคภูมิใจในตัวอาจารย์ของตนเป็นอย่างยิ่ง ในขณะนั้นและเสมอมา

พิสุทธิ์ได้เกษียณอายุราชการ จากกองทัพอากาศ โดยมีตำแหน่งสุดท้ายในราชการ เป็น “ผู้ช่วยผู้บัญชาการทหารอากาศ” ซึ่งนับว่าเป็นตำแหน่งที่มีเกียรติอย่างสูงแก่ตนเอง, ครอบครัว และวงศ์ตระกูล

การจากไปของพิสุทธิ์ในครั้งนี้ จึงก่อให้เกิดความเสียใจและเป็นที่อาลัยรักเป็นอย่างมากแก่ญาติพี่น้อง และเพื่อนฝูง ตลอดจนลูกศิษย์ลูกหาทั้งหลายในกองทัพอากาศ.....ทุกคนแทบจะมีความคิดที่เหมือนกันว่า ยังมีความเสียดายที่พิสุทธิ์ จากพวกเราเร็วเกินไป เพราะพิสุทธิ์ยังอาจใช้ความรู้ความสามารถ ในบั้นปลายของชีวิตให้เป็นประโยชน์แก่สังคม และประเทศชาติได้มากกว่านี้.........

ขอให้ดวงวิญญาณอันบริสุทธิ์ของพิสุทธิ์ ไม่ว่าจะสถิตย์อยู่ ณ ที่สถานใดก็ตาม ได้โปรดรับทราบด้วยว่า พวกเราทุกคนยังมีความอาลัยรัก และระลึกถึงน้ำใจอันบริสุทธิ์ของพิสุทธิ์อยู่เสมอตลอดไป และขอให้ดวงวิญญาณนั้น จงประสบความสุขและความสงบ ณ ที่สถานนั้นด้วย........

ด้วยความอาลัยรักอย่างยิ่ง

พลอากาศเอก ทวนทอง ฤทธาคนี ยอดอาวุธ

แด่พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นเพื่อนที่ดีที่สุดของผมคนหนึ่งที่ผมมี เราได้พบรู้จักเป็นเพื่อนกันเมื่อเราได้ร่วมเข้าเรียนในโรงเรียนเตรียมทหารรุ่นที่ ๕ คือปีการศึกษา ๒๔๘๕-๒๔๘๖ ตลอดระยะที่ได้ร่วมเรียนในโรงเรียนเตรียมทหาร และสำเร็จการศึกษาในโรงเรียนเตรียมทหารแล้ว ก็ได้ร่วมศึกษาต่อในโรงเรียนเทคนิคทหารบกจนกระทั่งสำเร็จปี ๓ ในโรงเรียนเทคนิคทหารบก ขึ้นปีที่ ๔ ได้มีการแยกเหล่า ผมและคุณพิสุทธิ์ ได้เลือกเรียนในเหล่าช่างอากาศจนกระทั่งสำเร็จการศึกษาปี ๕ ก็ออกรับราชการเป็นนายทหารสัญญาบัตรเหล่าช่างอากาศ ต่อมาได้สมัครเข้าเรียนในโรงเรียนการบินของกองทัพอากาศซึ่งอยู่ที่โคราช เป็นศิษย์การบินรุ่นเดียวกันอีก แต่เมื่อสอบผ่านศิษย์การบินชั้นปฐม คุณพิสุทธิ์ก็ได้ขออนุญาตไปศึกษาขั้นปริญญาโทที่มหาวิทยาลัย เอ็ม.ไอ.ที ในสหรัฐอเมริกา จำได้ว่าประมาณ ๒ ปี คุณพิสุทธิ์ก็กลับมาเป็นอาจารย์ รร.นอ.เป็นคำรบสองอีกหลายปี คุณพิสุทธิ์ก็ได้รับอนุญาตให้ไปเรียนการบินต่อที่โรงเรียนการบินที่โคราช ส่วนผมหลังจากสำเร็จเป็นนักบินผมก็ได้รับการคัดเลือกเป็นครูการบิน จนกระทั่งคุณพิสุทธิ์กลับมาฝึกบินต่ออีกครั้ง ผมก็ได้ทำหน้าที่ฝึกบินให้กับคุณพิสุทธิ์จนสำเร็จเป็นนักบิน แล้วคุณพิสุทธิ์ก็ได้กลับมาทำหน้าที่อาจารย์ใน รร.นอ. ส่วนผมก็ได้รับคำแนะนำและช่วยเหลือจากคุณพิสุทธิ์ติดต่อหาสถานที่เรียนในสหรัฐอเมริกาเพื่อศึกษาต่อปริญญาโทให้ หลังจากผมทำปริญญาโทกลับมาจากสหรัฐฯ ก็ได้มีโอกาสร่วมงานกับคุณพิสุทธิ์ที่ รร.นอ. ประมาณสองสามปีผมก็ได้ย้ายไปรับราชการที่อื่น ส่วนคุณพิสุทธิ์ยังอยู่ที่ รร.นอ. ตลอดระยะเวลาที่ทำงานร่วมกันนั้นคุณพิสุทธิ์ได้พยายามปรับปรุงด้านวิชาการและหลักสูตรของ รร.นอ. และได้นำวิชาการด้านต่าง ๆ มาให้แก่นักเรียนนายเรืออากาศตลอดเวลามิได้หยุด นับได้ว่าเป็นบุคคลคนเดียวที่ได้ทำประโยชน์ให้แก่ โรงเรียนนายเรืออากาศมากที่สุดในกองทัพอากาศไทย ต่อมาคุณพิสุทธิ์ได้ลาไปศึกษาขั้นปริญญาเอกที่สหรัฐอเมริกา หลังจากสำเร็จปริญญาเอกกลับมาก็มารับราชการที่รร.นอ.อีกเป็นคำรบที่สาม นับเป็นเกียรติและหน้าตาของรร.นอ.เป็นอย่างยิ่งที่มีอาจารย์ที่สำเร็จปริญญาเอกมาเป็นอาจารย์ ซึ่งยากที่จะหาอาจารย์โรงเรียนนายเรืออากาศในประเทศไทยที่สำเร็จขั้นปริญญาเอก คุณพิสุทธิ์ได้รับราชการอยู่ที่รร.นอ.จนได้รับพระราชทานเป็นพลอากาศตรีเต็มขั้นจึงได้ย้ายจากรร.นอ. จาก รร.นอ.ก็ได้เป็นผู้ริเริ่มก่อตั้งศูนย์กรรมวิธีข้อมูลของกองทัพอากาศ (ศูนย์คอมพิวเตอร์) จวบจนถึงระยะปลายของอายุรับราชการก็ได้มีโอกาสทำงานอยู่ในสถานที่เดียวกันอีกจนเกษียณอายุ

ผมได้รู้จักและเป็นเพื่อนสนิทกับคุณพิสุทธิ์มาเป็นเวลานานเกือบ ๕๐ ปี ผมมั่นใจที่จะพูดถึงคุณความดีของคุณพิสุทธิ์ด้วยความภาคภูมิใจ และถือเป็นโชคของผมที่ได้มีเพื่อนดีเช่นนี้ทั้งด้านส่วนตัวและราชการ โดยไม่เกิดความกระดากใจใด ๆ ทั้งสิ้น คุณพิสุทธิ์ตลอดชีวิตราชการได้มุ่งมั่นแต่ที่จะปฏิบัติงานให้เกิดประโยชน์ต่อทางราชการด้วยความเสียสละและซื่อสัตย์สุจริต และผลงานก็อยู่ให้เห็น แม้คุณพิสุทธิ์จะได้อำลาชีวิตจากโลกนี้ไปแล้ว โดยเฉพาะบรรดาลูกศิษย์ของคุณพิสุทธิ์ที่ดำรงตำแหน่งต่าง ๆ อยู่ในกองทัพอากาศในเวลานี้ว่าเป็นนายทหารที่มีคุณภาพแค่ไหนเพียงใด และเป็นผู้ที่ได้นำเอาความรู้แปลกใหม่ในสาขาวิชาการด้านต่าง ๆ มาพัฒนาหลักสูตรของรร.นอ.ให้ทันสมัยและทัดเทียมกับต่างประเทศจนทำให้นายทหารที่สำเร็จจากรร.นอ.เป็นที่ยอมรับของบุคคลภายนอก สำหรับศูนย์กรรมวิธีข้อมูลของกองทัพอากาศคุณพิสุทธิ์ก็ได้ใช้ความอุตสาหะก่อตั้ง แม้จะไม่ค่อยได้รับการสนับสนุนจากงบประมาณแต่ด้วยตั้งใจปรารถนาดีต่อทางราชการ ก็ได้วิ่งเต้นขอความสนับสนุนจากบุคคลภายนอกโดยไม่เห็นแก่ความเหนื่อยยากจนเป็นรูปร่างศูนย์กรรมวิธีข้อมูลของกองทัพอากาศ ซึ่งได้ช่วยให้การปฏิบัติงานของกองทัพอากาศดำเนินไปอย่างมีประสิทธิภาพ

ในด้านส่วนตัว คุณพิสุทธิ์เป็นบุคคลที่เต็มไปด้วยความเสียสละเอื้อเฟื้อต่อบุคคลอื่นด้วยความยินดีและเต็มใจ หากเพื่อนคนใดเข้าไปติดต่อขอความช่วยเหลือคุณพิสุทธิ์จะกุลีกุจอช่วยด้วยความเต็มใจ ถ้าสิ่งนั้นไม่เกินความสามารถจะไม่ได้รับการปฏิเสธจากคุณพิสุทธิ์ และยังเป็นคนที่มีความรู้อยู่ในขั้นหนอนหนังสือหรือห้องสมุดเคลื่อนที่ของพวกเพื่อนมาตั้งแต่สมัยเป็นนักเรียน เมื่อถึงเวลาจะสอบทุกครั้งก็ได้เป็นที่พึ่งพาของเพื่อนด้านวิชาการเสมอมา การวางตัวของคุณพิสุทธิ์ต่อผู้ใหญ่และเพื่อน ๆ ก็วางตัวได้เหมาะสมไม่เคยยกตนข่มผู้อื่น เป็นที่รักของผู้ใหญ่และเพื่อน แม้ว่าคุณพิสุทธิ์จะมีบิดาเป็นผู้บัญชาการทหารอากาศก็ตาม มีความซื่อสัตย์ จริงใจ เมตตาและหวังดีต่อเพื่อนและบุคคลที่ได้คบหามาโดยตลอด

ระยะเวลาสี่สิบกว่าปีที่ได้เป็นเพื่อนกันมากระทั่งคุณพิสุทธิ์ได้จบชีวิตลงนั้น มีแต่ทำตนให้เป็นประโยชน์ให้กับราชการ เพื่อนฝูงและสังคม คุณความดีที่ได้ทำไว้น่านำมาเป็นแบบฉบับที่ดีของอนุชนรุ่นหลังต่อไป แม้คุณพิสุทธิ์จะได้อำลาจากโลกนี้ไปแล้วก็ตาม ผมและเพื่อนรวมทั้งผู้ที่เคยเป็นลูกศิษย์ของคุณพิสุทธิ์ทุกคนยังคงจดจำคุณความดีนี้ไว้ไม่ลืม และอยากจะให้คุณความดีเหล่านี้ได้กลับกลายเป็นบารมีทานช่วยส่งวิญญาณของคุณพิสุทธิ์ได้พบกับความสงบสุข, หากว่าสวรรค์ชั้นฟ้ามีจริง ขอให้วิญญาณของเพื่อนได้เสพความสงบสุขอยู่ในสวรรค์ชั้นฟ้าที่สูงสุดและดีที่สุดตลอดไป

พล.อ.อ.วาทิต โหละสุต

คำไว้อาลัย พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

(พล.อ.อ.ประภา เวชปาน)

เตรียมทหารบกรุ่นห้า รวมใจ รำลึก
พิสุทธิ์ผู้จากไป เพื่อนแก้ว
มิตรร่วมรุ่นอาลัย เศร้าสลด ยิ่งนา
อุทิศบุญทำแล้ว ส่งให้สุคติเทอญ

เตรียมทหารบกรุ่นห้าใจว้าวุ่น เพื่อนร่วมรุ่นนักบินมาสิ้นสูญ
พล.อ.อ.พิสุทธิ์จากไปใจอาดูร ขอเทิดทูนขอขมา และอาลัย
เพื่อนพิสุทธิ์การศึกษานับว่าเยี่ยม สมองเปี่ยมจำจดได้สดใส
ครูอาจารย์ยกย่องผ่องอำไพ ไม่มีใครเทียมเท่าการเล่าเรียน
เป็นศิษย์การบินรูปหล่อ น. ๑๗ ไม่พ้นเสร็จได้ทุนสหรัฐฉวัดเฉวียน
เป็นนักบินเหนื่อยยากยังพากเพียร ทั้งได้เรียนปริญญาเอกเอนกอนันต์
ท่านไว้ชื่อคุณพ่อตน จอมพลฟื้น น่าชมชื่นทุกสิ่งอย่างล้วนสร้างสรร
ผู้ริเริ่มมีคุณค่าตั้งสถาบัน โรงเรียนสำคัญนายเรืออากาศของชาติไทย
พิสุทธิ์เป็นอาจารย์หลักของนักเรียน ท่านพากเพียรทุกขั้นไม่หวั่นไหว
ผลิตนายทหารสมศักดิ์เป็นหลักชัย เจริญวัยน่ายกย่องก้องนภา
หลักยุทธศาสตร์ทัพอากาศปัจจุบัน ใช้ป้องกันภัยทั้งผองครองเวหา
ยับยั้งข้าศึกไม่ให้ลึกเข้ามา เหนือเมฆาออกศึกต้องฝึกปรือ
อาจารย์ ดร. พิสุทธิ์ท่านรุดหน้า เห็นคุณค่าเตรียมพลังทางหนังสือ
ทหารรุ่นใหม่ความรู้ดีมีฝีมือ สำคัญคือต้องจงรักและภักดี
ฝึกฝนนักเรียนเปลี่ยนทัศนะ เพิ่มทักษะเป็นหลักสมศักดิ์ศรี
ทั้งเข้มแข็งกล้าหาญชาญชาตรี สู้ไพรีพินาศเพื่อชาติไทย
ยามสงบช่วยรัฐพัฒนาประเทศ ทุกขันฑ์เขตชนบทให้สดใส
ต้องช่วยกันรักษาประชาธิปไตย เป็นกลไกสำคัญช่วยดำรง
นายเรืออากาศรุ่นหนึ่งสองครองอากาศ สวมบทบาทเกียรติ ก้องต้องประสงค์
ครูอาจารย์ช่วยทุกท่านให้มั่นคง จงยืนยงความรักและสามัคคี
คุรอาจารย์อายุมากขอฝากเตือน แม้ดาวเดือนยังดับอับแสงศรี
ขอให้ศิษย์จงจำเริญเดินทางดี บุญบารมีอาจารย์พิสุทธิ์ช่วยฉุดนำ
พวกเรารุ่นห้าพรรณนาถึงเพื่อน เหมือนคอยเตือนความตายจะกรายกล้ำ
อย่าประมาทลืมหมดกฎแห่งกรรม ถือพระธรรมเป็นทางเดินจำเริญใจ
ขอวิญญาณพิสุทธิ์ผู้ผุดผ่อง แม้ลอยล่องเวียนวนอยู่หนไหน
จงได้รับกุศลผลบุญใด ๆ อุทิศให้สู่สุข พ้นทุกข์เทอญ

ด้วยรัก และ ผูกพัน แด่ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี
จาก พลอากาศโท สมโพธิ ปัญญาสุข

ระยะเวลาร่วมครึ่งศตวรรษที่ผ่านมาน่าจะนับว่ายาวนานพอที่จะพิสูจน์ความสัมพันธ์อันแนบแน่นระหว่างท่านอาจารย์ พิสุทธิ์ กับ ผม ท่านเป็นทั้งพี่และเพื่อน เป็นปรมาจารย์เป็นอดีตผู้บังคับบัญชาที่ผมรักและเคารพยิ่ง และท่านก็ได้ให้ความเมตตารักใคร่ มีความปรารถนาดีแก่ผมและครอบครัวตลอดมาจนยากที่จะลืมเลือนพระคุณอันยิ่งใหญ่นี้ ตราบชั่วชีวิต

ผมได้มีโอกาสรู้จักใกล้ชิดกับท่านตั้งแต่เริ่มเข้าเรียนในโรงเรียนเท็ฆนิคทหารบก (ซึ่งต่อมาถูกยุบไปรวมกับ รร. นายร้อย ทบ. หรือ รร. จปร. ในปัจจุบัน) ท่านเรียนก่อนผมหนึ่งรุ่น พวกเรามักเรียกท่านว่า ผู้ช่วยพิสุทธิ์ คำว่าผู้ช่วยนี้ย่อจาก “ผู้ช่วยผู้บังคับหมวด” ซึ่งเป็นตำแหน่งนักเรียนบังคับบัญชาในสมัยนั้น ความจริงผมรู้จักท่านข้างเดียวมาก่อน ตั้งแต่ผมเข้าเป็นนักเรียนเตรียมทบ. รุ่น ๖ เมื่อปี พ.ศ. ๒๔๘๖ ท่านอยู่รุ่น ๕ เมื่อเข้ามาเป็นนักเรียนเท็ฆนิคก็ได้รู้จักท่านดีขึ้นเมื่อมาอยู่กองร้อยเดียวกัน พักโรงนอนเดียวกัน ท่านพักชั้นบน ผมอยู่ชั้นล่างเขาจัดให้นอนเรียงกันเป็นแถว มีโต๊ะเรียนข้างเตียงให้ฝึกฝนตนเองแต่ผลที่ได้มักจะตรงกันข้ามเห็นที่นอนทีไรเป็นง่วงนอนทุกที

การเรียนในโรงเรียนเท็ฆนิคทหารบกนั้น “หิน” เพียงใด ผู้ที่เคยสัมผัสมารู้กันดี นอกจากจะเรียนยากแล้ว ยังสอบกันเอากันจริงจัง ไม่มีการอลุ่มอล่วยหรือเห็นแก่หน้าอภิสิทธิ์ชนคนใดเลย แต่ละรุ่นจึงมีผู้สำเร็จการศึกษาตามเวลาที่กำหนดเกือบไม่ถึงครึ่ง ทำให้พวกที่ร้อนตัวกลัวตกซึ่งรวมทั้งผมด้วยจำใจต้องขยัน มักขออนุญาตอยู่ดูหนังสือต่อหลังแตรนอนแทบทุกคืน ก็ให้บังเอิญที่ผู้ช่วยพิสุทธิ์ ซึ่งตามปกติก่อนนอนจะต้องถือขันน้ำ แปรงสีฟันลงมาเข้าห้องน้ำที่อยู่ชั้นล่าง และมักแวะเวียนไต่ถามทุกข์สุขเพื่อนฝูงและน้อง ๆ ชั้นล่างที่ยังไม่เข้านอนอาจสังเกตเห็นว่าผมนั่งทู่ซี้จนดึกดื่นอยู่ได้แทบทุกคืน จึงเร่เข้ามาทักทายถามไถ่ คืนต่อ ๆ มาก็นั่งลงชี้แนะ ตั้งแต่นั้นมา คืนไหนท่านว่างมักจะลงมานั่งซัก นั่งสอน ช่วยแก้ไขปัญหาประดามีนี่เองเป็นปฐมบทแห่งวิสาสา ปรมาญาติ นับว่าผมมีโชคดีที่ได้รู้จักใกล้ชิดกับท่าน ผมเคารพและนับถือท่านดุจพี่ร่วมสายโลหิต ท่านเป็นผู้ที่มีน้ำใจอันประเสริฐ โอบอ้อมอารีมีเมตตากรุณาต่อผู้ที่ด้อยกว่า โดยเฉพาะคำว่า “เพื่อน” มีความหมายลึกซึ้งยิ่งนักในพจนานุกรมฉบับของท่าน และเป็นคำที่ท่านพร่ำเอ่ยถึงจวบจนลมหายใจสุดท้าย นอกจากท่านจะเป็น “นักเรียน” ที่เรียนเก่ง และรักเรียนเป็นชีวิตจิตใจแล้ว ยังรักการถ่ายทอดวิชาความรู้แก่ผู้ที่ใคร่รู้โดยไม่ปิดบังแม้แต่น้อย แบบที่ผมเรียกเอาเองว่า “เรียนให้มาก สอนให้หมด” ผมจึงใคร่ขอใช้คำว่า อาจารย์ในการกล่าวถึงท่านตลอดบันทึกนี้ หากจะมีการจัดอันดับลูกศิษย์ลูกหาของท่าน ผมน่าจะอยู่รุ่นแรก ๆ เก๋าก็๊กเสียยิ่งกว่าลูกศิษย์ก้นกุฏิคนใด ๆ แต่ในระยะหลัง ๆ นี้ มีลูกศิษย์รุ่นใหม่ ๆ เยอะขึ้น ผมเลยตกอันดับไปเป็นลูกศิษย์ใต้ถุนกุฏิ

ตลอดเวลาตั้งแต่เริ่มรับราชการในกองทัพอากาศ ท่านอาจารย์พิสุทธิ์กับผมมักได้มีโอกาสได้ใกล้ชิดกันเสมอ ทั้งในชีวิตการงานและส่วนตัว ทั้งในประเทศและต่างประเทศ แม้อยู่ห่างกันคนละเมืองหรือคนละประเทศ ก็ไม่เคยเว้นที่จะคิดติดต่อถึงกันเสมอมาจวบจนถึงวาระที่ต้องจากกันชั่วนิรันดร์ ผมทราบดีว่าท่านมีอุดมการณ์สูงส่งในการอุทิศตนเพื่อประเทศชาติและกองทัพอากาศ มีเจตจำนงแน่วแน่ในอันที่จะช่วยจรรโลงกองทัพอากาศให้ เจริญก้าวหน้าทัดเทียมนานาอารยประเทศ โดยเฉพาะการเสริมสร้างกำลังพลให้มีคุณภาพ ซึ่งท่านได้ทำตามความตั้งใจนั้นตั้งแต่สมัยยังเรียนอยู่ โดยชักชวนหรือที่สมัยนี้ชอบเรียกว่า “ล็อบบี้” เพื่อน ๆ ทั้งร่วมรุ่นและต่างรุ่นที่เรียนอยู่ในเกณฑ์ดี ให้สมัครเป็นทหารอากาศ และว่ากันว่า “วิชาที่น่าเรียน” หลายวิชาที่นักเรียนเท็ฆนิค รุ่น ๑๑, ๑๒ และ ๑๓ เหล่าทหารอากาศ และจำพวกช่างอากาศได้เรียน ท่านมีส่วนในการพิจารณากำหนด นับว่าเป็นงานชิ้นแรกที่ท่านทำเพื่อกองทัพอากาศตั้งแต่ยังไม่ได้ปฏิบัติราชการจริง ๆ

ครั้นเมื่อผู้บัญชาการทหารอากาศ ท่านจอมพลอากาศ ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี ได้ตกลงใจตั้งโรงเรียนนายเรืออากาศขึ้นในปี พ.ศ. ๒๔๙๖ นั้น อาจารย์พิสุทธิ์ ยังศึกษาปริญญาโทอยู่ที่ M.I.T. ผมเป็นผู้หนึ่งที่ได้รับมอบให้สอนวิชากลศาสตร์แก่นักเรียนนายเรืออากาศตั้งแต่รุ่นแรกที่เข้าศึกษา ระหว่างนั้นผมและท่านยังคงติดต่อกันทางจดหมาย ผมเล่าเรื่องราวต่าง ๆ ให้ท่านทราบทุกระยะ สังเกตเห็นว่าท่านมีความกระตือรือร้น สนใจเรื่องเกี่ยวกับโรงเรียนนายเรืออากาศเป็นอย่างยิ่ง จนกระทั่งท่านสำเร็จการศึกษาและต่อมาได้ย้ายมาปฏิบัติราชการที่โรงเรียนนายเรืออากาศ ท่านได้เริ่มจับงานที่ท่านรักและใฝ่ฝันทันที นี่คือจุดเริ่มต้นแห่งความผูกพันของอาจารย์พิสุทธิ์กับโรงเรียนนายเรืออากาศ ซึ่งเป็นตำนานที่น่าจดจำเล่าขานกันต่อ ๆ ไป จากลูกศิษย์ ถึงหลานศิษย์ เหลนศิษย์ ไม่รู้จบสิ้น สมควรแล้วที่โรงเรียนนายเรืออากาศตั้งชื่ออาคารใหม่ของกองการศึกษาว่า "อาคาร พล.อ.อ. พิสุทธิ์ ฤทธาคนี" เพื่อเป็นอนุสรณ์แห่งคุณความดีของท่าน

เนื่องจากโรงเรียนนายเรืออากาศเพิ่งเริ่มก่อตั้ง ยังขาดความพร้อมแทบทุกด้าน แต่ผู้บริหารยุคบุกเบิกก็ช่วยกันฟันฝ่าอุปสรรคนานัปการเพื่อให้ภารกิจบรรลุผลตามเป้าหมายที่ผู้บังคับบัญชากำหนด ท่านอาจารย์พิสุทธิ์นับเป็นกำลังสำคัญยิ่ง แม้ขณะนั้นยศและตำแหน่งของท่านไม่สูงนัก แต่งานที่ทำนั้นยิ่งใหญ่และมากมายเหลือคณานับ ท่านได้ทุ่มเททั้งแรงกาย แรงใจให้กับโรงเรียนอย่างที่ผมไม่คิดว่าท่านจะทำได้หรือผู้ใดจะทำได้เท่า ท่านได้ช่วยผลักดันให้มีการปรับปรุงหลักสูตร จัดเนื้อหาสาระวิชาให้ก้าวหน้าทันยุคสมัย เพื่อความเป็นเลิศทางวิชาการและเพื่อให้วิชาที่จัดสอนบังเกิดประโยชน์แก่กองทัพอากาศให้มากที่สุด นับเป็นการวางรากฐานการศึกษาให้แก่โรงเรียน ปัญหาที่หนักหนาสาหัสรรจ์ขณะนั้นคือการขาดแคลนครูอาจารย์ที่ทรงคุณวุฒิ การแก้ไขปัญหาคงไม่พ้นสองวิธี คือเพิ่มอาจารย์ที่มีคุณวุฒิ และเพิ่มคุณวุฒิอาจารย์ที่มีทางทฤษฎีดูเหมือนจะง่าย แต่ทางปฏิบัตินั้นยาก ปัญหามีว่าจะทำอย่างไรจึงจะทันการ จำนวนนักเรียนเพิ่มขึ้นเพราะรับเข้ามาทุกปี บางปีก็มีจำนวนมาก (ตามแผนที่ JUSMAG เสนอแนะตอนนั้น) และเมื่อขึ้นชั้นสูงยังต้องแยกเหล่า แตกแขนงวิชามาขึ้นและยากขึ้นไปอีก ท่านอาจารย์ได้เข้ารับมือกับปัญหานี้โดยไม่ย่อท้อ ท่านเที่ยวไปล็อบบี้ (ตามแบบของท่าน) สมัครพรรคพวกทั้งในและนอกกองทัพอากาศที่นับว่ามีฝีมือ ให้มาช่วยงานในโรงเรียนนายเรืออากาศ อาศัยที่ชื่อเสียงด้านวิชาการของท่านเป็นที่ยอมรับอย่างกว้างขวางในวงการศึกษา ทั้งทางทหารและพลเรือนขณะนั้นจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยได้เชิญท่านเป็นอาจารย์พิเศษสอนระดับปริญญาโทด้วย จึงทำให้เราได้อาจารย์ที่ทรงคุณวุฒิจากหลายสถาบันมาช่วยให้ปัญหานี้เบาบางลงไปได้มาก ในด้านการเพิ่มคุณวุฒิของอาจารย์ที่มี ท่านได้ส่งอาจารย์ซึ่งส่วนใหญ่เป็นลูกศิษย์ที่ท่านสอนมาเองกับมือไปศึกษาต่อปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ ณ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพราะในระยะนั้นกองทัพอากาศมีทุนการศึกษาสำหรับอาจารย์ไปศึกษาต่างประเทศน้อย และขณะเดียวกันก็พัฒนาความรู้อาจารย์ที่สอนอยู่ด้วยตัวของท่านเอง ไม่ยอมเว้นแม้แต่อาจารย์ภายนอกอย่างผม ท่านจับติวเข้มในวิชาที่ผมสอนและที่จะมอบหมายให้สอน แนะนำตำราให้ใช้ "เล่มนั้นอ่อนไปต้องใช้เล่มนี้" "เวคเตอร์ไม่พอต้องเทนเซอร์" ฯลฯ เล่นเอาผมเซ่อไปสิบหนจริง ๆ กว่าจะนำไปสอนนักเรียนได้

ด้วยอุดมการณ์ที่แน่วแน่ ตั้งใจจริง และเสียสละอย่างสูง แม้จะมีงานล้นมือในการฝ่าฟันอุปสรรคต่าง ๆ ดังกล่าวแล้ว ท่านยังต้องรับภาระในการสอนนักเรียนด้วยตนเองอีกหลายวิชา เรียกได้ว่าทำงานเกินตัว ท่านจะสอนวิชาที่หาผู้สอนยาก เช่น วิชาเทคนิคเฉพาะทางทหารหรือ วิชาที่ไม่มีสอนในสถาบันอื่น ยิ่งไปกว่านั้น ท่านจะไม่ยอมให้ห้องเรียนขาดอาจารย์ ถ้าห้องใดว่างและท่านไม่ติดการสอนหรือภารกิจสำคัญ จะเข้าสอนแทนทันที จากความรับผิดชอบตรงต่อเวลา รักษาวินัย ทำให้ท่านต้องวิ่งสอน เข้าห้องโน้นออกห้องนี้เกือบทั้งวัน น่าเหนื่อยแทน ไม่รู้ว่าท่านเอาเวลาและพลังมาจากไหน จึงทำงานได้อย่างที่เรียกว่า "หลอดเดียวทำงานหลายหน้าที่" แม้กระนั้นก็ยังบ่นอยากเป็นทศกัณฐ์ มีสิบเศียร ยี่สิบกร คงทำงานได้มากกว่านี้ การตรากตรำทำงานอย่างไม่เห็นแก่เหนื่อยแก่เหนื่อย ทำให้สุขภาพของท่านทรุดโทรมลงไปไม่น้อย เป็นเหตุให้ต้องเลื่อนการเดินทางไปทำปริญญาเอกต่อ ณ สหรัฐฯ ตามกำหนดเดิมในปี พ.ศ. ๒๕๐๒

แต่ก็แปลกที่ท่านทำงานหนักขนาดนั้นแล้ว ยังอุตส่าห์มีเวลานอกให้เพื่อนได้ บางทีก็จัดสัมมนาวิชาการเชิงสังสรรค์ที่บ้านในวันหยุดหรือหลังเลิกงานหรือพอมีการสอบไปนอกกันก็เปิดติวให้ฟรีโดยไม่จำกัดเวลาและสถานที่มีอยู่ปีหนึ่งนึกสนุก อยากสัมผัสชีวิตนักรักบี้ อุตส่าห์อาสาสมัครเป็นผู้จัดการทีมรักบี้สโมสรทหารอากาศ ซึ่งมีเพื่อนรุ่นน้องเป็นลูกทีมหลายคนรวมทั้งผม ซึ่งตอนนั้นยังสอนพิเศษอยู่ที่โรงเรียนด้วย ก็ได้สนุกสมใจ เพราะตอนมานอนเก็บตัวที่อาคารสวัสดิการ ปรากฏว่าผู้จัดการถูกล่าตัว หนีแทบไม่ทัน

ในปี พ.ศ. ๒๕๐๓ ผมได้ทุน JUSMAG ไปศึกษาขั้นปริญญาโทต่อที่สหรัฐฯ เป็นเวลาสองปี ก่อนไปท่านก็ช่วยติวให้ เมื่อกำลังเรียนก็อาศัยการติวข้ามทวีป แนะการบ้านทางไปรษณีย์จนผมสามารถเอาตัวรอดกลับมาถ่ายทอดวิชาให้กับนักเรียนได้สมเจตนารมณ์ของอาจารย์

ครั้นท่านเดินทางไปศึกษาต่อที่สหรัฐฯ เมื่อปี พ.ศ. ๒๕๐๕ ผมเพิ่งเรียนจบใกล้จะกลับ ท่านและพี่ฤดียังได้แวะไปเยี่ยมผม และพักอยู่ด้วยกัน ๒-๓ วัน เมื่อผมกลับมาก็ได้ย้ายเข้ามารับราชการที่โรงเรียนนายเรืออากาศ ผมได้รับมอบหมายให้รับผิดชอบหมวดวิชาคณิตศาสตร์ที่ท่านเคยเป็นหัวหน้าวิชามาก่อน ผมได้ดำเนินตามนโยบายที่ท่านวางไว้ จนกระทั่งท่านกลับจากการศึกษา

ในช่วงที่ท่านจบปริญญาเอกแล้วกลับมาปฏิบัติงานที่โรงเรียนนายเรืออากาศครั้งหลังนี้ ท่านมีงานจากภายนอกเพิ่มขึ้นมาก ทั้งงานระดับชาติ งานสอนพิเศษในมหาวิทยาลัยหลายแห่งซึ่งท่านรับสอนในวันหยุด เป็นกรรมการในโครงการสำคัญ ๆ ทั้งในและนอกกองทัพอากาศจึงต้องรามือจากการสอนไปบ้าง งานสำคัญที่ต้องปฏิบัติคือการจัดตั้งศูนย์กรรมวิธีข้อมูล กองบัญชาการทหารสูงสุด ซึ่งท่านเป็นแกนสำคัญ ดำเนินการจนสำเร็จเป็นรูปร่าง จัดตั้งเป็นหน่วยมีอัตราถาวรเสร็จสรรพ รื้อนั่งร้านลงให้กลับกรมกองเดิม ประสพการณ์ที่ได้ทำให้ท่านเกิดแนวคิดที่จะให้กองทัพอากาศมีศูนย์รวมคอมพิวเตอร์เพื่อการวิจัยอันเป็นที่มาของสำนักงานวิจัยระบบและคำนวณ รายละเอียดเรื่องนี้ผมไม่กล่าวถึง ขณะที่ท่านปฏิบัติงานหลายแห่งอยู่นี้ตำแหน่งของท่านสูงขึ้นตามลำดับ จนได้เป็นผู้อำนวยการ กองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศในปี พ.ศ. ๒๕๑๔ ผมก็ได้รับใช้ท่านในฐานะรองฯ ซึ่งเป็นผู้ใต้บังคับบัญชาใกล้ชิดที่สุด เป็นเวลาถึง ๘ ปีเต็ม เมื่อท่านย้ายไป ผมจึงได้รับตำแหน่งนี้ ต่อมาจากท่านได้รับตำแหน่งผู้บัญชาการศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธกองทัพอากาศ เป็นท่านแรก หน่วยนี้ท่านได้ริเริ่มก่อตั้งจนเป็นผลสำเร็จ และผมก็อุตส่าห์ได้รับตำแหน่งนี้ต่อจากท่านอีก ครั้นท่านเลื่อนขึ้นไปเป็นผู้ช่วยผู้บัญชาการทหารอากาศ ผมก็ยังได้ตามขึ้นไปอยู่ห้องใกล้ ๆ ท่านที่ชั้น ๓ อาคาร ๘ แฉก ทั้ง ๆ ที่ไม่ได้มีตำแหน่งสำคัญอะไร จะเห็นว่าผมได้อยู่ใกล้ชิดกับท่านตลอดมาตั้งแต่เริ่มรับราชการจนเกษียณอายุ แต่เรื่องยังไม่จบแค่นี้

หลายปีเต็มทีที่ท่านกับผมบังเอิญมาตัดผมที่เดียวกัน กับช่างคนเดียวกันทุกเช้าวันพฤหัสบดีเหมือนกัน ผมคิวต่อจากท่านอย่างเคย จึงได้พบปะกันเป็นประจำ แม้กระทั่งเกษียณอายุแล้ว จนถึงวันที่ท่านต้องเข้ารักษาตัวครั้งสุดท้ายผมเองไม่เคยคิดว่าท่านจะจากผมไปจริง ๆ อย่างไรก็ตามที สักวันหนึ่งข้างหน้าไม่ช้าก็เร็ว ผมก็คงได้ตามท่านไปอีก - อย่างเคย

ถ้าจะสรรเสริญคุณความดีของท่านอาจารย์ โดยไม่กล่าวถึงตำแหน่งศาสตราจาย์ ดูเหมือนจะขาดความสมบูรณ์ในสาระสำคัญไปทีเดียว เพราะอย่างน้อยท่านก็เป็นศาสตราจารย์ท่านแรกของโรงเรียนนายเรืออากาศ แต่ที่สำคัญยิ่งกว่านั้นก็คือ เพราะชื่อเสียงของท่านแท้ ๆ ที่ทำให้ได้ข้อยุติในการประชุมพิจารณาในการดำเนินการจัดตั้งอัตราศาสตราจารย์ในโรงเรียนทหารซึ่งมาติดตรงปัญหาที่มีผู้ติงว่า อาจารย์โรงเรียนทหารมีคุณภาพต่ำกว่าของพลเรือนน่าจะขอเพียงอัตราเทียบเท่าศาสตราจารย์ชั้นสองของทางพลเรือน (ตามการจัดลำดับสมัยนั้น) ผู้ที่ควรได้รับเครดิตในเรื่องนี้ น่าจะเป็น น.อ.บรรเทา ปุณศรี (ยศขณะนั้น) หัวหน้าคณะของผมที่ไปประชุม ซึ่งได้แย้งทันทีว่าตำแหน่งศาสตราจารย์น่าจะเป็นสากล มีศักดิ์ศรีทัดเทียมกัน หากจะอ้างคุณภาพก็ขอให้พิจารณาว่าอาจารย์โรงเรียนทหารอย่างอาจารย์พิสุทธิ์ มีคุณภาพด้อยกว่าหรือไม่ กรรมการที่ท้วงติงก็ยอมรับเพราะชื่อเสียงของท่านอาจารย์พิสุทธิ์ เป็นที่รู้จักกันดีและยอมรับทั่วไป ที่ประชุมจึงมีมติให้ดำเนินการต่อไปดังปรากฏผลในปัจจุบัน นับว่าท่านเป็นบุคคลที่มีชื่อเสียงใช้อ้างอิงได้ และบรรดา

ศาสตราจารย์โรงเรียนทหารทั้งหลายเป็นหนี้บุญคุณท่านในเรื่องนี้

ท่านอาจารย์พิสุทธิ์เป็นบุคคลที่หาได้ยาก คือท่านถึงพร้อมด้วย**อุปการ** คือให้โดยไม่หวังตอบแทน และ**ปฏิการ**คือการตอบแทนการให้โดยไม่เพิกเฉยรั้งรอ เป็นปูชนียบุคคลที่ควรแก่การคารวะ โดยเฉพาะอย่างยิ่งจากศิษย์เยี่ยงผม ท่านธำรงไว้ซึ่งคุณธรรมของครูอาจารย์อันได้แก่ **การเป็นกัลยาณมิตร ตั้งใจประสิทธิ์ความรู้ ดำเนินชีวิตลีลาครูทั้งสี่ มีหลักฐานสอบถาม** และ**ทำหน้าที่ครูต่อศิษย์** เมื่อผมรู้จักท่านดีในหลายแง่มุม มีความรู้สึกนิยม ยกย่องในกิริยา วาจาที่สุภาพ นอบน้อม ถ่อมตน ซึ่งเป็นเสน่ห์เฉพาะตัวที่หาไม่ได้ง่ายนัก เปรียบกอข้าวที่รวงแน่นเมล็ดงาม ย่อมค้อมยอดลงต่ำ ดุจน้อมคารวะอย่างเป็นนิจ ทำให้ผมรู้สึกภูมิใจว่าตนได้คบบัณฑิตไม่ใช่บัณฑิตธรรดาด้วย แต่เป็นดุษฎีบัณฑิตทีเดียว

การหักโหมตรากตรำทำงานหนักมาตลอด โดยเฉพาะงานสอนที่ต้องใช้เสียงมากและคลุกคลีอยู่กับฝุ่นชอล์กตลอดวัน อาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้สุขภาพของท่านเริ่มไม่สู้ดีกอปรกับลูกศิษย์ของท่านมีจำนวนมากด้วยกัน ต่างรุมล้อม แสดงความกตัญญู กตเวทิตา สนองพระคุณอาจารย์ให้สมกับความเคารพรัก จนอาจารย์ไม่ค่อยได้พักผ่อนเท่าที่ควร ประกอบกับวัยที่สูงขึ้น สุขภาพของท่านในระยะหลัง ๆ เริ่มทรุดโทรมต้องเข้ารักษาในโรงพยาบาลบ่อยครั้ง การเดินเหินไม่คล่องแคล่วเหมือนเดิม แต่เมื่อผมได้พบท่านครั้งหลังสุดเห็นว่าท่านแข็งแรงกระฉับกระเฉงขึ้นกว่าเมื่อหลายเดือนก่อน ดังนั้นพอทราบข่าวว่าท่านต้องเข้ารักษาตัวผมยังเชื่อว่าไม่ช้าท่านคงหายได้มาพบกันอีกเช่นครั้งก่อน ๆ แต่อนิจจา สังขารของท่านสิ้นสภาพที่จะต่อสู้โรคร้ายเสียแล้ว ท่านจึงต้องจากพวกเราไป

จริงอยู่ ความตายและการจากพรากเป็นเรื่องธรรมดา เป็นส่วนหนึ่งของการเปลี่ยนแปลง แต่การจากพรากคนอันเป็นที่รักและผูกพันย่อมนำความเศร้าโศกเสียใจให้ผู้ที่ยังอยู่ ผมขอร่วมความรู้สึกนี้กับพี่ฤดีและหลาน ๆ รวมทั้งญาติมิตรของท่านอาจารย์พิสุทธิ์ทุกคน ความตายที่ทุกคนต้องเผชิญ ถือเป็นเรื่องทำให้ใจสลดหดหู่ แต่ท่านอาจารย์พิสุทธิ์ได้เผชิญแล้วอย่างอาจหาญ ท่านเตรียมทุกอย่างพร้อมราวกับทราบว่าการจากไปนี้เป็นเพียงส่วนหนึ่งของอัตตาภาพร่างกายเท่านั้น ซึ่งเป็นกฎธรรมชาติที่ไม่อาจฝืนได้ แต่คุณงามความดีอันเป็นส่วนอมตะหาได้จากไปไม่ยังปรากฏในจิตใจและความทรงจำของผู้อยู่เบื้องหลังตลอดไป ขอคุณงามความดีของท่านและบุญกุศลที่ครอบครัว ญาติมิตร อุทิศให้ ร่วมกันเป็นพลวปัจจัยอำนวยสวรรค์สมบัติแก่ท่านในสัมปรายภพด้วย เทอญ

พล.อ.ท.

เสียดายท่านอาจารย์ พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

เมื่อผมเป็นนักเรียนนายเรืออากาศ เมื่อ พ.ศ. ๒๔๙๖ ผมมีอาจารย์ น.ต.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นอาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนนายเรืออากาศ อาจารย์เพิ่งจบการศึกษาจากสหรัฐอเมริกาใหม่ ๆ และเพิ่งจบการศึกษาจากโรงเรียนการบิน และเป็นนักบินด้วย นักเรียนทุกคนมีความตื่นเต้น สนใจ เอาใจใส่กับอาจารย์พิสุทธิ์เป็นพิเศษเพราะนอกจากจะสนใจในความเป็นหนุ่มยศ น.ต. รูปหล่อ ผอมเพรียว ยังเป็นคนคล่องแคล่วว่องไว เป็นคนทันสมัย และเป็นนักบินซึ่งในสมัยนั้นยังไม่มีอาจารย์ประจำ ซึ่งเป็นนักบินในโรงเรียนนายเรืออากาศเลย ความที่ทุกคนใฝ่ฝันอยากเป็นนักบิน ทุกคนก็ทุ่มเทความสนใจ เอาใจใส่ พยายามติดตาม เรียนรู้ ดูแบบอย่างโดยอยากที่จะเป็นอย่างอาจารย์บ้าง เมื่อจบการศึกษาแล้ว และยิ่งได้รู้ว่าท่านเป็นบุตรชายของท่านแม่ทัพอากาศ จอมพลอากาศ ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี ซึ่งเป็นแม่ทัพอากาศที่เก่งที่สุดคนหนึ่งของกองทัพอากาศด้วยแล้ว นักเรียนก็ยิ่งเพิ่มความสนใจ เอาใจใส่ต่ออาจารย์พิสุทธิ์มากยิ่งขึ้น วิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนนายเรืออากาศสมัยนั้น ยากที่จะหาอาจารย์มาสอนให้ได้เหมือนอาจารย์พิสุทธิ์ และก็เป็นวิชาที่ยากที่ทุกคนกลัวสอบตกด้วย

อาจารย์พิสุทธิ์ท่านมีวิญญาณของความเป็นครูเต็มเปี่ยมอย่างยากที่จะหาใครมาเปรียบให้เสมอเหมือน ท่านพยายามหาหนทางและวิธีการที่จะโน้มน้าว ชักจูงลูกศิษย์ทุกคนให้สนใจรักการเรียน การศึกษา ด้วยวิธีการต่าง ๆ ผมยังจำได้ว่า เวลานั้นเมื่อท่านมาสอน ท่านจะพกตั๋วภาพยนตร์มาเต็มกระเป๋า เวลาใครตอบปัญหาได้ถูกใจท่านก็จะควักตั๋วออกมาแจก ให้ไปดูหนังในวันเสาร์-อาทิตย์พร้อมกับแฟนด้วย ทุกคนอยากได้ตั๋วภาพยนตร์ ทุกคนรู้ว่าท่านมีมาทุกครั้ง แต่ทุกคนต้องใช้ความพยายามจึงจะได้ ความเป็นอัจฉริยะของท่าน ทำให้อาจารย์เป็นคนพูดเร็ว สอนเร็ว เดินเร็วและเขียนเร็ว เวลาท่านสอนท่านอธิบาย ท่านพูดด้วย เขียนด้วย นักเรียนต้องฟังต้องดูและต้องเขียนตามอย่างเร็ว มิฉะนั้นจะจดไม่ทัน เพราะท่านลบหมดเพื่อจะเขียนใหม่ ในเวลาที่ใกล้สอบไล่ปลายปีท่ารู้ว่านักเรียนมีปัญหาอยากพบ อยากถามอาจารย์มาก ท่านก็จะยอมเสียสละ กินนอนอยู่กับนักเรียนเลยไม่กลับบ้าน อาจารย์มิได้เป็นห่วงเป็นใยนักเรียนเฉพาะเมื่ออยู่ในโรงเรียนเท่านั้น แม้เมื่อจบเป็นนายทหารแล้ว ท่านก็ยังติดตามถามไถ่ คอยให้คำแนะนำตักเตือนอยู่เสมอทุกคน นักเรียนทุกคนรู้สึกอยู่เสมอว่าท่านไม่ได้เป็นเพียงอาจารย์เท่านั้น ท่านยังเป็นทั้งเพื่อน ทั้งพี่ ทั้งพ่อ แม้เมื่อใดเรามีทุกข์ มีปัญหาเราก็มาหาอาจารย์ และเมื่อมีโอกาสเราก็รวมกันมาหา มาเลี้ยงอาจารย์อยู่เสมอ เราดีใจมากเมื่อเห็นอาจารย์อยู่ท่ามกลางพวกเรา และเราก็รู้ว่าท่านมีความสุขมาก อาจารย์พิสุทธิ์เป็นอาจารย์ที่นั่งอยู่ในชีวิตและในหัวใจของพวกเราทุกคนตลอดมา เรามีความรัก เรามีความภาคภูมิใจในอาจารย์ของเราอย่างที่สุด

การจากไปอย่างไม่มีวันกลับของอาจารย์ ทำให้พวกเราใจหายและนำความโศกเศร้าสลดมาสู่พวกเรามากอย่างยากที่จะกล่าวได้ พวกเรายังระลึกถึงวิชาความรู้ คำแนะนำ ตักเตือน สั่งสอน ความรัก ความเมตตาปรานี ความห่วงใยของอาจารย์ที่มีต่อศิษย์ทุกคนไว้อย่างแนบแน่นจะไม่มีวันเสื่อมคลายตลอดไป

ขออำนาจคุณพระศรีรัตนตรัย สิ่งศักดิ์สิทธิ์ทั้งหลาย และอำนาจแห่งคุณความดีของอาจารย์ที่มีต่อศิษย์ทุกคนมาโดยตลอด จงคุ้มครองและบันดาลให้อาจารย์ประสบสุขคติในทุกภพ ทุกชาติ ทุกแห่ง ทุกสถาน ชั่วนิจนิรันดร

พล.อ.อ.วีระ กิจจาทร
กรรมการผู้อำนวยการใหญ่บริษัทการบินไทย
นักเรียนนายเรืออากาศ รุ่น ๑
๒๖ ม.ค. ๒๕๓๕

ไว้อาลัย
แด่
ท่านพลอากาศเอก ศาสตราจารย์ด๊อกเตอร์ พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

เนื่องด้วยท่านพลอากาศเอก ศาสตราจารย์ด๊อกเตอร์ พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ได้ถึงแก่อนิจกรรม ก่อนเวลาอันสมควร ได้สร้างความเสียใจและเสียดายอย่างสุดซึ้งแก่ครอบครัวของท่าน บรรดาศิษย์ของท่าน และบรรดามิตรสหายของท่าน ซึ่งมีจำนวนมากมาย

ในระหว่างที่รับราชการ ท่านได้ถ่ายทอดความรู้อันสูงของท่านให้แก่ศิษย์ของท่านในกองทัพอากาศตลอดมา จนเป็นที่เลื่องลือและเทิดทูนในเรื่องความรู้และความสามารถของท่านโดยทั่วไป

กระผมในฐานะที่ได้รู้จักท่านตั้งแต่ท่านยังเยาว์วัย และได้มีโอกาสได้เห็นท่าน มีความเจริญเติบโตในทางวิทยาการและในหน้าที่ราชการตลอดมา มีความเศร้าสลดและเสียใจเป็นอย่างยิ่งที่ท่านต้องจากไปในเวลาที่ยังไม่สมควร

กระผมขออัญเชิญ คุณพระศรีรัตนตรัยและสิ่งศักดิ์สิทธิ์โปรดคุ้มครองให้ท่านประสบแต่ความสุขสงบในสัมปรายภพด้วยเทอญ

พลอากาศโท น้อย ปาณิกบุตร

คำไว้อาลัย
แด่
พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

พระคุณครูไพศาลปานพสุธ　　นาม "พิสุทธิ์" ประทีปส่องสุดผ่องใส
สถาบันเรืออากาศเลื่องลือไกล　ประทับใจศิษย์เป็นนิจ "ฤทธาคนี"

เมื่อผมเข้าเป็นนักเรียนนายเรืออากาศรุ่นที่ ๕ ก็เรียกได้ว่าเป็นศิษย์มีอาจารย์ด้วยผู้หนึ่ง เพราะตั้งแต่ก่อตั้งโรงเรียนนายเรืออากาศ อาจารย์ท่านก็สอนนักเรียนนายเรืออากาศมาตั้งแต่รุ่น ๑ มาเลยทีเดียว ระยะแรกนั้นสิ่งต่าง ๆ ไม่ว่าอาคารสถานที่ อุปกรณ์ต่าง ๆ และโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ครูอาจารย์ก็ขาดแคลนอย่างมาก มีอาจารย์ประมาณ ๓๐ ท่าน แต่มีนักเรียนเป็นร้อย ครูอาจารย์ต้องวิ่งรอกสอนกันอย่างเหน็ดเหนื่อย โดยเฉพาะท่านอาจารย์แล้วถือว่าเป็นกำลังสำคัญในด้านวิชาการมากที่สุด วิชาพื้นฐานด้านอากาศยานบางวิชาสมัยนั้นผู้รู้ยังมีน้อย ท่านจึงใช้วิธีถ่ายทอดวิชานั้น ๆ ในหมู่อาจารย์ที่เกี่ยวข้องเสียก่อน เพื่อจะได้ช่วยกันสั่งสอนศิษย์อีกต่อหนึ่งได้อย่างทั่วถึง ความที่อาจารย์เป็นผู้มีความรู้ดีเลิศ และมีความจำเป็นเยี่ยม สมัยนั้นยังไม่มีห้องสมุดให้ค้นคว้า นักเรียนนายเรืออากาศตั้งฉายาให้ท่านว่า "ห้องสมุดใหญ่" จะค้นคว้าหาคำตอบสิ่งใดก็ค้นเอาจากท่าน และท่านจะพอใจมากถ้ามีศิษย์คอยถาม และสนใจเรื่องที่ท่านสอน ทุก ๆ เย็นช่วงเวลาฝึกฝน อาจารย์จะเข้ามาอยู่กับเราเสมอ เพื่อคอยตอบคำถามต่าง ๆ ดูท่านพอใจและมีความสุข ซึ่งเราทุกคนก็ไม่เคยลืมเหตุการณ์ในอดีตเหล่านี้เลย

นับแต่อดีตจนปัจจุบัน หลักสูตรของโรงเรียนนายเรืออากาศได้ปรับปรุงและพัฒนาอยู่เสมอ เพื่อให้ทันกับความเจริญก้าวหน้ามาเป็นลำดับ และด้วยสายตาอันกว้างไกลของอาจารย์ ท่านได้วางรากฐานด้านการศึกษาไว้เมื่อยี่สิบปีก่อน โดยได้กำหนดสาขาวิชาวิศวกรรมต่าง ๆ เพิ่มในหลักสูตร ซึ่งเปลี่ยนแปลงจากเหล่านักบิน เหล่าสรรพาวุธ และเหล่าอากาศโยธินเป็นต้น รวมทั้งปรับโครงสร้างการเรียนการสอน และการวัดผลให้เป็นมาตรฐานเดียวกับมหาวิทยาลัยทั้งในและต่างประเทศ ทางด้านวัสดุอุปกรณ์และห้องปฏิบัติการวิศวกรรมต่าง ๆ ท่านก็ได้เป็นผู้ริเริ่มกำหนดไว้แต่แรก และปัจจุบันก็เป็นที่ประจักษ์แล้วว่า รากฐานที่ท่านวางไว้ในอดีต ขณะนี้งอกงามทันกับเหตุการณ์ปัจจุบันอย่างถูกต้อง และตรงกับความต้องการของกองทัพและความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยีสมัยใหม่ทุกประการ

เพื่อเป็นเกียรติแก่ท่านอาจารย์และครอบครัว และเป็นสัญญลักษณ์แห่งคุณงามความดีทั้งหลายที่อาจารย์ได้สร้างไว้ให้กับโรงเรียนนายเรืออากาศ เมื่ออาคารเรียนขนาดใหญ่ ๓ ชั้นสร้างเสร็จ เราจึงได้ให้ชื่ออาคารเรียนแห่งนี้ว่า อาคาร พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี และทำพิธีเปิดอาคารเมื่อวันครูที่ ๑๖ มกราคม ๒๕๓๕ ที่ผ่านมา

ท้ายที่สุดนี้ ผมขอแสดงความเสียใจอย่างสุดซึ้งมายังคุณพี่ฤดีและครอบครัว และขอตั้งจิตอธิษฐานขอให้บารมีแห่งคุณความดีที่ท่านอาจารย์ได้บำเพ็ญมาตลอดอายุขัยของท่าน จงเป็นกุศลผลบุญส่งผลให้ดวงวิญญาณของท่าน ไปสู่สุคติในสัมปรายภพด้วยเทอญ

พลอากาศโท

(ธีร์ศิลป์ คัมภีรญาณนนท์)
ผู้บัญชาการโรงเรียนนายเรืออากาศ

★ ★

อาลัย พล.อ.อ. ศ. ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

ข่าวการจากไปอย่างไม่มีวันกลับของท่าน พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ยังความเศร้าสลดและเสียใจแก่พวกเราทุกคนในกองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ เป็นอย่างยิ่ง เพราะท่านซึ่งทุกคนเรียกว่า "อาจารย์พิสุทธิ์" เป็นที่รักและเคารพนับถือของพวกเรา มีความผูกพันอย่างลึกซึ้งกับกองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ ดังที่ผมได้เคยกล่าวรายงานต่อประธานในพิธีเปิดป้ายอาคารเรียน "พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี" มาแล้วเมื่อวันครูที่ ๑๖ มกราคม ๒๕๓๕ ที่ผ่านมาว่าท่านคือ บุพการีแห่งกองการศึกษาฯ โดยแท้ เป็นผู้ริเริ่มบุกเบิกและส่งเสริมการศึกษาของโรงเรียนนายเรืออากาศ มาโดยตลอดจนวาระสุดท้ายของชีวิต เคยเป็นทั้งอาจารย์ ศาสตราจารย์ และผู้อำนวยการกองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ นักเรียนนายเรืออากาศรุ่นแรก ๆ คงจะจำได้ว่าท่านวิ่งจากห้องเรียนหนึ่งไปอีกห้องเรียนหนึ่งเพื่อสอนวิชาต่าง ๆ ที่ท่านรับผิดชอบอยู่หลายวิชา และหลายชั้นเรียน เมื่อท่านย้ายไปรับราชการในตำแหน่งสูงขึ้น และเกษียณอายุแล้ว ท่านก็ยังมาตัดผมที่โรงเรียนนายเรืออากาศ เป็นประจำทุกเช้าวันพฤหัสบดี และได้ใช้เวลานั้นให้คำแนะนำปรึกษาเกี่ยวกับการศึกษาของโรงเรียนนายเรืออากาศมิได้ขาด

ผมเองน่าจะเรียกท่านว่า "พี่" มากกว่า "อาจารย์" เพราะท่านเป็นนักเรียนนายร้อยรุ่นพี่ (ที่ไม่เห็นฝุ่น) ซึ่งถือได้ว่ากินข้าวกระทะเดียวกันมา ตอนที่ผมเข้ามารับราชการในโรงเรียนนายเรืออากาศ เป็นครั้งแรก ต้นปี ๒๕๐๕ ท่านได้มอบหนังสือ SOLID STATE PHYSICS ของ DEKKER ให้ผมและเขียนว่า "สำหรับจุน น้องชาย ในโอกาสที่ได้มาทำงานด้วยกัน-พิสุทธิ์ ๑๖ ม.ค. ๐๕" อย่างไรก็ตามผมเห็นทุกคนเรียกท่านว่า อาจารย์ทั้งนั้นก็เลยเรียกตามบ้าง และจากนั้นเป็นต้นมาท่านก็ให้ความรัก เอ็นดูผมตลอดมาเหมือนกับน้องแท้ ๆ คนหนึ่ง

แม้ว่าท่านจะจากพวกเราไปแล้วก็ตาม คุณงาม ความดี ความรัก ความเอ็นดู ที่ท่านเคยให้กับพวกเรากองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ จะคงฝังตรึงอยู่ในใจของพวกเรา โดยเฉพาะตัวผมอย่างมิมีวันลืมเลือน

ขอตั้งจิตอธิษฐาน พึ่งอำนาจแห่งคุณพระศรีรัตนตรัยและอำนาจแห่งบุญกุศล ตลอดจนคุณความดีที่ท่านอาจารย์พิสุทธิ์ ได้กระทำมาโดยตลอด จงดลบันดาลให้ดวงวิญญาณของท่านอาจารย์ จงประสบความสุขในสัมปรายภพ ชั่วนิรันดร์ เทอญ

พล.อ.ต.

(จุน จันทร์สุดา)

ผู้อำนวยการกองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ

สำหรับจุน น้องชาย
ในโอกาสที่ได้มาทำงาน
ด้วยกัน
พิสุทธิ์
16 มค 05

ไว้อาลัยแด่พี่พิสุทธิ์

ในจำนวนพี่น้องทั้งหมด ผมได้มีโอกาสอยู่ใกล้ชิดกับพี่พิสุทธิ์มากที่สุด ทั้งนี้เนื่องจากว่าความสนใจในงานของเราเหมือนกัน และหนทางชีวิตในกองทัพอากาศของเรา ทำให้เราได้ทำงานร่วมกันหลายครั้งหลายหน ผมจึงมีโอกาสได้รับใช้พี่พิสุทธิ์โดยใกล้ชิดมากกว่าน้องทุกคน คุณแม่และน้อง ๆ เลยขอให้ผมเขียนคำไว้อาลัยในการสูญเสียพี่พิสุทธิ์ เป็นตัวแทนพวกเราทุกคน

พี่พิสุทธิ์รักน้อง ตั้งแต่ผมยังเป็นเด็กเล็ก ท่านก็พาผมไปซื้อของเล่น พอผมและน้อง ๆ โตขึ้นมาท่านก็เป็นห่วงเป็นใย พยายามสนับสนุนคุณพ่อให้ส่งพวกเราไปศึกษาชั้นสูง ท่านจับพวกเราไปสอนหนังสือถ้าท่านไม่ว่าง ท่านก็ให้ลูกศิษย์ท่านสอนแทนท่าน ซึ่งพวกเราทุกคนระลึกในบุญคุณนี้อยู่เสมอ และขอกราบขอบพระคุณพี่ ๆ ที่ช่วยสอนพวกเราแทนท่านมา ณ ที่นี้ด้วย

พี่พิสุทธิ์รักลูกศิษย์ ท่านจะเล่าให้พวกเราฟังเสมอว่าใครกำลังทำอะไรที่ไหน ท่านมีความภูมิใจในความสำเร็จของลูกศิษย์ท่านทุกคน เวลาพวกเรามีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ ท่านก็จะบอกให้พวกเราไปหาคนโน้นคนนี้ ด้วยความไว้วางใจเป็นอย่างยิ่ง ท่านสนับสนุนลูกศิษย์ท่านทุกคนที่ปรารถนาจะไปศึกษาต่างประเทศให้ได้ไป และประสบความสำเร็จทุกคนขณะอยู่ต่างประเทศ ถึงแม้ว่าท่านเองจะมิได้อยู่ด้วยความสุขสบาย แต่ท่านก็ยังมีความเอื้อเฟื้อเผื่อแผ่ต่อนักเรียนไทยที่ไปหาท่านทุกคน ไม่ว่าจะเป็นการติววิชาที่ยาก ๆ หรือจะเป็นข้าวสักมื้อหรือจะเป็นทั้งสอนทั้งเลี้ยงอีก ทั้งยังหาที่นอนให้ด้วย ท่านก็เอาด้วยทุกอย่าง

พี่พิสุทธิ์รักกองทัพอากาศ ท่านเป็นทหารอาชีพ สิ่งที่ท่านพอใจคืองานที่ท่านทำ มิได้มีความทะเยอทะยานที่จะเป็นใหญ่เป็นโต หรือมุ่งหวังอำนาจและความมั่งมีศรีสุข ฉะนั้นเมื่อท่านต้องต่อสู้ท่านก็ต่อสู้ตราบใดที่ท่านยังคิดว่าท่านมิจนตรอก ท่านก็ไม่ยอมละทิ้งอาชีพทหาร ในชีวิตการต่อสู้ของท่านนั่น ในบางครั้งครอบครัวท่านก็ต้องทนลำบาก แต่ทุกคนก็สนับสนุนท่านนั้นเป็นโชคดีของท่านเป็นอย่างยิ่ง ในความอดทนต่อความลำบากของครอบครัวของท่านนั้นนับเป็นการเสียสละที่น่าสรรเสริญอย่างยิ่ง

ในชีวิตการเป็นทหาร อาชีพอันยาวนานของท่านนั้น ท่านได้ปรับปรุงระดับการศึกษาของโรงเรียนนายเรืออากาศ ให้อยู่ในระดับเดียวกันกับมหาวิทยาลัย หรือสถาบันการศึกษาขั้นอุดมศึกษา ทั้งที่มีอยู่ในประเทศไทย และต่างประเทศ ท่านได้ดำเนินการปรับปรุงการศึกษาให้สอดคล้องกับระดับของเทคโนโลยีที่เราต้องนำมาใช้ในการทหาร อาทิเช่น การศึกษาเรื่องการนำวิถี และการบังคับของขีปนาวุธ (พ.ศ. ๒๕๐๐) การศึกษาเรื่องการยิงจากทางข้าง (ประมาณ พ.ศ. ๒๕๑๐) การวิเคราะห์เพื่อการตัดสินใจทางการทหารและแนวความคิดทางการทหารแบบระบบ (ประมาณ พ.ศ. ๒๕๑๒) การศึกษาเรื่องอวกาศพลศาสตร์ (พ.ศ. ๒๕๑๓) การใช้เครื่องจักรคำนวณเพื่อการทหาร (พ.ศ. ๒๕๑๓) การจัดให้มีการค้นคว้า วิจัย และพัฒนาแบบเป็นหน่วยงาน (พ.ศ. ๒๕๑๕) ท่านได้เสนอแนะให้ ทอ.นำเอาเครื่องบินขับไล่แบบ F - 16 และเครื่องบินลำเลียงแบบ C - 130 มาใช้ในราชการ (พ.ศ. ๒๕๑๘) ฯลฯ ในการนี้ท่านสั่งให้มีการสอนเรื่องการออกแบบอากาศยานแบบ F - 16 ณ โรงเรียนนายเรืออากาศ และได้มอบหมายให้ผมสอนวิชานี้ และได้สั่งให้ผมทำการวิเคราะห์เครื่องบิน C - 130 ในช่วงเวลานั้นด้วย

เมื่อท่านได้รับความไว้วางใจจากผู้บังคับบัญชา ให้เป็น ผู้ช่วยผู้บัญชาการทหารอากาศ ท่านก็ยังเป็นห่วงโรงเรียนนายเรืออากาศ หาทางดำเนินการสนับสนุนให้อาจารย์โรงเรียนนายเรืออากาศ ได้ไปดูงานทางด้านการใช้อุโมงค์ลม ณ ประเทศสหรัฐอเมริกา (พ.ศ. ๒๕๒๗)

นอกจากสนับสนุนในเรื่องการศึกษาของโรงเรียนนายเรืออากาศแล้ว ท่านก็ยังสนับสนุนการวิจัยการรบ และการจำลองการรบด้วยเกม ให้กับฝ่ายยุทธการอีกด้วย ซึ่งในบางครั้งก็ต้องร่วมงานยุทธการด้วย ถึงแม้ว่าท่านจะครองยศระดับสูง และอายุจะมากแล้ว เมื่อได้รับคำสั่งกองทัพอากาศให้ไปบิน บ.ข. ๑๘ ท่านก็มิได้ย่อท้อ เมื่อหน่วยบินมีปัญหาท่านก็สนับสนุนส่งนักบินที่ทำงานให้หน่วยของท่าน ไปร่วมทำการทดลองบินในพื้นที่ปฏิบัติการของหน่วย ท่านได้ทำประโยชน์ให้ไว้กับกองทัพอากาศเกินกว่าที่ผมจะนำมากล่าว ณ ที่นี้

พี่พิสุทธิ์รักคุณพ่อและคุณแม่ เมื่อคุณพ่อสงสัยอะไร โดยเฉพาะในเรื่องวิชาการ และการศึกษา ท่านจะต้องเรียกพี่พิสุทธิ์ไปถาม พี่พิสุทธิ์ก็มิเคยบกพร่อง และทำหน้าที่ลูกที่ดีต่อคุณพ่อและเลี้ยงดูคุณแม่ให้มีความสุข จนสิ้นอายุขัยของท่านทั้งสอง ฉะนั้นเมื่อสิ้นคุณพ่อไปแล้ว พวกเราคือน้อง ๆ ทุกคน ก็มองพี่พิสุทธิ์เป็นทิศเบื้องหน้า เมื่อท่านจากเราไป จึงทำความอาลัยมาสู่พวกเราเป็นอย่างยิ่ง

ไม่ว่าวิญญาณของพี่พิสุทธิ์จะอยู่ในสวรรค์ชั้นใดก็ตาม ขอให้พี่พิสุทธิ์จงมีแต่สงบสุข และขอกราบภาวนาให้ท่านข่าวคุณพ่อคุณแม่ดูแลพวกเราให้อยู่ในทางที่ถูกในทางที่ควร จงตลอดไป

คุณแม่ประดับ ฤทธาคนี
นาวาอากาศตรี ประพัทธ์ ร.ฤทธาคนี
นาวาอากาศเอก วัชระ ร.ฤทธาคนี
นายวรฤทธิ์ ร.ฤทธาคนี
นางสาวธนิดา ร.ฤทธาคนี

คุณพิสุทธิ์ ของผม

"น้ากูร น้ากูร" แม้เสียงนี้จะเรียกผมนานมาเกือบครึ่งศตวรรษ (๒๔๘๗ - ๒๕๓๔) ผมก็ยังไม่เคยลืม

คุณพิสุทธิ์กับผมเริ่มใกล้ชิดสนิทสนมกัน เมื่อเราต่างก็เป็นนักเรียนเตรียมทหารบก และนักเรียนเท็คนิคทหารบกด้วยกัน ผมเข้าเตรียม ทบ. รุ่น ๔ (๒๔๘๔) ก่อนคุณพิสุทธิ์หนึ่งรุ่น ผมมาจากครอบครัวที่ยากจน คุณพ่อผมเคยรับราชการกระทรวงการคลัง แต่ท่านเสียตั้งแต่พ.ศ. ๒๔๘๑ ไม่เหลืออะไรไว้ให้ครอบครัวมากนัก ส่วนคุณพิสุทธิ์เกิดในตระกูลที่สูงส่ง คุณพ่อคือ นาวาอากาศเอก ขุนรณนภากาศ (ยศขณะนั้น) นักรบผู้มีชื่อเสียงโด่งดังในกรณีพิพาทอินโดจีนฝรั่งเศส คุณแม่คือ คุณพี่สอาด ฤทธาคนี เป็นครูโรงเรียนสตรีวิทยา มีศักดิ์เป็นพี่สาวของผม คุณพิสุทธิ์ ได้รับการอบรมที่ดีมาตั้งแต่เกิดให้เป็นนักสู้เต็มตัว มีความประพฤติดี อ่อนน้อมถ่อมตน คุณพิสุทธิ์เรียกผมว่า "น้ากูร" อย่างเต็มปากเต็มคำ ตามจารีตประเพณีที่ดีของคนไทย ใหม่ ๆ ผมรู้สึกเขิน ๆ และอายเพื่อน ๆ มาก ทั้งนี้เพราะผมแก่กว่าเพียงปีเดียว และโดยเฉพาะอย่างยิ่งฐานะทางสังคมของเราแตกต่างกันราวฟ้ากับดิน แต่แล้วในที่สุดผมก็ต้องยอมแพ้แก่การปฏิบัติตนอย่างงดงาม จริงใจ เสมอต้นเสมอปลายของ คุณพิสุทธิ์ ผมยอมรับสภาพความเป็นน้า โดยความภาคภูมิใจเป็นที่สุด

ระหว่างที่ผมเข้ารับการศึกษาในโรงเรียนทหารอยู่นั้น ผมได้รับความกรุณาในเรื่องค่าใช้จ่ายในการศึกษา (ยกเว้นเงินเดือน) จากคุณอา (พ.ต.หลวงพิทักษ์ ทัณฑพล) ส่วนค่าใช้จ่ายส่วนตัวเป็นรายเดือนได้รับความกรุณาจากพี่ชายต่างบิดา (พล.ท.เฟื่อ ฤทธาคนี) เป็นเงิน ๗ บาทต่อเดือน เงินจำนวนนี้เหลือเฟือมาก เพราะสมัยนั้นข้าวผัดจานละ ๕ สตางค์ และตลอดเวลาที่อยู่ในโรงเรียนเตรียมทหารบกก็แทบไม่ต้องเสียอะไรเลย นอกจากเสียเหงื่อ ดังนั้นผมจึงมีความสุขในชีวิตขณะเรียนตามสมควร

อย่างไรก็ตามสิ่งใด ๆ ในโลกนี้ล้วนอนิจจัง ในปี พ.ศ. ๒๔๘๖ พวกเรานักเรียนถูกโยกย้ายไปอยู่ในป่าของจังหวัดเพชรบูรณ์ ในช่วง ๘ เดือนแรก พวกเราต้องเปลี่ยนสภาพเป็นกรรมกรก่อสร้างอย่างเต็มตัว กลางวันทำงานทั้งวัน ยิ่งเหนื่อยมากก็ยิ่งกินมาก แต่กลางคืนกลับมีเวลาว่างมาก และการออกไปเที่ยวหาความสำราญนอกที่ตั้งของโรงเรียนก็พอทำได้ ดังนั้นค่าใช้จ่ายเพื่อให้มีความสุขพอสมควร จึงสูงกว่าเมื่ออยู่ที่กรุงเทพมาก ผมจึงจำเป็นต้องอดทนจำกัดการใช้จ่าย ให้อยู่ภายในวงเงินที่ได้รับเดือนละ ๗ บาท ซึ่งคุณพิสุทธิ์ ก็คงรู้อยู่แก่ใจเป็นอย่างดี

เช้าวันนั้นอากาศที่ป่าเพชรบูรณ์หนาวเย็นจับใจเหมือนเช่นเคย ผมทำงานอยู่กลางกอไผ่สูงจากพื้นดินประมาณเมตรกว่า ๆ เพื่อตัดต้นไผ่ที่มีลำตรง - ใหญ่ - ยาว ให้ได้ก่อนกินอาหารเช้า ขณะที่ผมกำลังง่วนฟันต้นไผ่อยู่นั้น ได้ยินเสียงเรียก "น้ากูร น้ากูร" ผมจึงเหลียวไปเห็นคุณพิสุทธิ์ กำลังปีนกอไผ่ขึ้นมาหาผม แล้วก็เหยียดตัวเหยียดแขนส่งของให้แก่ผม ผมก็ต้องก้มตัวเหยียดตัวลงไปรับ คุณพิสุทธิ์ได้กล่าวด้วยเสียงเบา ๆ ว่า "คุณพ่อให้เอาเงินมาให้" แล้วก็รีบลงจากกอไผ่จากไป ผมรู้สึกงงเป็นอย่างมาก พอเห็นเป็นเงินใบละ ๑๐ บาท ก็รู้สึกว่าตัวร้อนผ่าวไม่หนาวต่อไปอีกแล้ว โลกนี้ช่างสุขสันต์เสียเหลือเกิน พร้อมกันนั้นก็ซาบซึ้งในความมีน้ำใจของคุณพิสุทธิ์ ที่พยายามไม่ให้เพื่อนฝูงดูหมิ่นดูแคลนผมได้ จึงยอมลำบากปีนป่ายฝ่าดงหนามไผ่อันแหลมคม ขึ้นมาหาผมเพื่อมอบเงินให้แบบไม่เปิดเผย เสียงเรียกนี้จึงให้ทั้งความรักและความอบอุ่น ให้เกียรติและให้ความมั่งคั่งแก่ผม เป็นเสียงที่มีความหมายแก่ชีวิตของผม แล้วผมจะลืมเสียงนี้ได้อย่างไร! ผมได้รับเงินทุกเดือนอย่างสม่ำเสมอ จนสำเร็จเป็นนายทหาร คุณพิสุทธิ์มีวิธีการมอบให้

อย่างแนบเนียน จนผมคิดว่าคงไม่มีผู้ใดได้ล่วงรู้ถึงเรื่องนี้เลย

ความผูกพันของผมกับคุณพิสุทธิ์แน่นแฟ้นยิ่งขึ้น เพราะภรรยาของผม (เพ็ญศรี กาญจนโหติ) เป็นลูกสาวคนเดียวของคุณอาแท้ ๆ ของคุณพิสุทธิ์ซึ่งได้เติบโตเป็นเพื่อนเล่นที่สนิทสนมกันมาก มาตั้งแต่เด็ก ๆ ครอบครัวเราจึงใกล้ชิดกันมากไปมาหาสู่กันตลอดเวลา ก่อนที่คุณพิสุทธิ์จะจากไป ภรรยาของผมยังได้พาหลานตา - ยายคนแรก (บุตรชายของ น.ต.สมศักดิ์และน.ต.หญิงจริมจิต จันทร์จรุงภักดิ์) ไปกราบคุณตาพิสุทธิ์ ภรรยาของผมกลับมาเล่าให้ฟังว่าคุณตาพิสุทธิ์มีสุขภาพดีมาก อุ้มหลานไปกอดและยังให้เงินก้นถุงอีกด้วย ผมจึงสบายใจมาก และคิดว่าคุณพิสุทธิ์คงจะอยู่กับเราต่อไปได้อีกนาน

ครั้นแล้ววันที่คุณพิสุทธิ์จากไปก็มาถึง ภรรยาของผมเสียใจเป็นที่สุด ร้องให้สะอึกสะอื้นอยู่เป็นเวลานาน ทำให้ความดันโลหิตสูง ซึ่งเป็นโรคประจำตัวสูงขึ้นอย่างมาก กว่าจะสงบลงได้ก็ทำเอาวุ่นวายกันไปทั้งบ้าน สำหรับผมนั้นไม่ได้แสดงออกอะไรมากนัก แต่ในส่วนลึกของจิตใจนั้น ผมสุดแสนจะเสียใจเป็นที่สุด

อย่างไรก็ตามเมื่อว่าถึงกฎธรรมชาติแห่งโลก ทุกคนเมื่อเกิดมาแล้วย่อมมีความตายเป็นที่สุด ไม่เร็วก็ช้า จะทิ้งไว้เบื้องหลังก็แต่ความดี หรือความชั่วที่ตนได้กระทำไว้ สำหรับคุณพิสุทธิ์ผู้มีบุญคุณแก่ผมอย่างเหลือล้น ผมเห็นแต่ความดีความงามที่ได้บำเพ็ญมาตลอดชีวิต ขออำนาจแห่งคุณงามความดีที่คุณพิสุทธิ์ได้ประกอบไว้เมื่อยังมีชีวิตอยู่ จงเป็นพลังปัจจัยน้อมนำดวงวิญญาณของคุณพิสุทธิ์ไปสู่สุคติ ในสัมปรายภพด้วยเทอญ

พล.ต.อังกูร กาญจนโหติ

คำอาลัย
แด่ พล.อ.อ. ศ. ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

ผมได้มีโอกาสได้พบท่านอาจารย์พิสุทธิ์ เมื่อปี ๒๕๒๑ ในขณะที่บริษัทฯให้บริการแก่ศูนย์วิทยาศาสตร์ และคำนวณ กองทัพอากาศ ซึ่งท่านรับผิดชอบอยู่ ในโอกาสนั้นผมได้ประจักษ์ถึงความสามารถด้านวิชาการของท่าน ที่สำคัญกว่านั้นคือความโอบอ้อมอารีของท่าน ความเป็นครูของศิษย์ทั้งหลาย และความสนใจในทุกข์สุขของบรรดาลูกศิษย์และผู้ใต้บังคับบัญชาของท่าน

ท่านอาจารย์พิสุทธิ์ ได้กรุณาให้ความสนิทสนมแก่ผมเสมือนศิษย์หรือญาติ ซึ่งผมเองก็ได้ให้ความเคารพนับถือท่านเสมือนอาจารย์ หรือญาติผู้ใหญ่อย่างจริงใจ ท่านอาจารย์พิสุทธิ์ได้ให้ความสนใจทุกครั้งที่ได้ทราบว่าประสบความสำเร็จเรื่องใดท่านก็จะเป็นรายแรก ๆ ที่จะแสดงความยินดีเสมอ ความสนิทสนมได้ขยายไปถึงครอบครัวของผม ท่านอาจารย์พิสุทธิ์ไม่เคยลืมที่จะส่งคำอวยพรในวันเกิดของคุณพ่อ และคุณแม่ของผมด้วย ซึ่งนับเป็นความกรุณาของท่านที่มีต่อผมและครอบครัวเป็นอย่างมาก ความกรุณาและความมีน้ำใจของท่านนี้จะตราตรึงอยู่ในความทรงจำของผมตลอดไป

ในระยะหลัง ผมรู้สึกเป็นห่วงสุขภาพของท่าน และได้ทราบข่าวมรณกรรมของท่านด้วยความเสียใจอย่างยิ่ง ขอให้บุญกุศลอันเกิดจากความเมตตากรุณาอันบริสุทธิ์ของท่าน ได้ส่งผลให้วิญญาณของท่านจงไปสู่ความสุขสงบในสัมปรายภพตลอดกาลเทอญ

เทียนชัย ลายเลิศ

คำไว้อาลัย พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคณี

"น. ๑๗"

ขอเล่าประวัติย่อ น. ๑๗
โรงเรียนการบินถิ่นกำเนิดลูกผู้ชาย
กินนอนอยู่โคราชไม่หวาดกลัว
อยากเหาะได้เหมือนนกไม่ตกดิน
พ.ศ. เก้าสิบสองต่างลองสมัคร
ทั้งรุ่นสี่สิบสองคนเหมือนดลใจ
พิสุทธิ์พ่อบุญปลูกเป็นลูกแม่ทัพ
เคร่งครัดวินัยใจเอื้อเพื่อส่วนรวม
ครูการบินล้วนมีชื่อระบือนาม
ดั่งพ่อนกสอนบินลูกอินทรีย์
ผู้การน้อยศุภรจันท่านเข้มงวด
ผู้การประคองเป็นมิตรเหมือนบิดา
ผู้การประสงค์เป็นคนตรงซื่อ
น. ๑๗ ใกล้ชิดเฝ้าติดตาม
ครูพะเนียง กานตรัตน์จัดว่าเยี่ยม
สอนวิชาหลัก ๆ หนักกว่าใคร
ครูไสว ช่วงสุวนิช ลูกศิษย์รัก
ใช้หลักการบินช่วยไม่งวยงง
ครูประยุทธ ประจวบเหมาะท่านเจาะลึก
ครูทวีป บุนนาคทั้งลากดัน
ครูสุรยุทธ พิวาศบุตรนั้นสุดยอด
ครูช่วยครูชู เสียงดังล้วนฟังดี
ครูถวิล นำชัย กมล ไม่บ่นว่า
ครูแจ้ง ครูมนัสเสียงชัดชิน
ศิษย์ น. ๑๗ จะสำเร็จเนิ่นนาน
ไม่มีเครื่องบินฝึกแสนสะอึกใจ
อเมริกามาช่วยด้วย บ.ที-ซิก (T-6)
มีทุนฝึกต่ออเมริกาน่าชื่นชม
คนดวงดีมีทวนทองและพิสุทธิ์
ไปบินต่ออเมริกาต่างหน้าบาน
พิสุทธิ์นั้นเรียนต่อพ่อไม่ว่า
ได้ปริญญาเอกเกียรตินิยมสมใจ
น. ๑๗ บินเสร็จปีเก้าห้า
กว่าจะสำเร็จเหนื่อยยากกันมากหลาย
ไม่กลัวตายต่อสู่อยู่เพื่อบิน
ไม่เมามัวชื่นชมสมถวิล
ความเคยชินช่วยให้รอดปลอดภัย
ด้วยใจรักอนาคตจะสดใส
ทุกคนไปตายดาบหน้าบ้างบ้าบวม
เหมือนผ้าพับผืนใหม่ไม่ใส่สรวม
เหมือนไม้นวมระนาดมารยาทดี
มือบินงามประจักษ์สมศักดิ์ศรี
ดูท่วงทีเริ่มหัดเขินขัดตา
ชอบออกตรวจค่ำคืนตื่นผวา
ชอบเฮฮารักสนุกไม่คุกคาม
ท่านมีชื่อเหนือนักเลงยังเกรงขาม
ไม่ลืมนามเป็นหลักประจักษ์ใจ
น้ำใจเปี่ยมฝึกสอนไม่อ่อนไหว
ดุจบันไดไต่คั่นให้มั่นคง
ท่านฝึกหนักอาจินต์ไม่บินหลง
บินให้ตรงมือเท้าต้องเข้ากัน
ทั้งสองฝึกมีหลักดังจักรผัน
ไม่กีดกันความรู้ที่ครูมี
ท่านถ่ายทอดให้ศิษย์ไม่ปิดหนี
ทั้งครูทวี ครูพิจิตร สอนศิษย์บิน
มีคุณค่าเกินนับกว่าทรัพย์สิน
ทั้งบนดินและอากาศไม่หวาดภัย
อากาศยานเก่าถูกปลดหมดอายุขัย
หัวอกใครแสนจะเศร้าเฝ้าดูลม
ชีวิตพลิกได้เหาะอย่างเหมาะสม
ที่เซาซมกลับคึกคักไม่พักนาน
รวมเทพบุตรคนชื่อเขาชื่อหาญ
ไม่ช้านานเสร็จสรรพกลับเมืองไทย
เห็นคุณค่าบากบั่นไม่หวั่นไหว
ไม่มีใครเทียมเท่าเจ้าประคุน
ล้วนแกล้วกล้าไม่กลัวจนหัวหมุน

ทุกคนต่างภูมิใจเหมือนได้บุญ   ไม่ลืมคุณครูเคยสอนแต่ก่อนมา
พระท่านว่ากาลเวลานั้นฆ่าคน   ทั้งมีจนก้อนดินและหินผา
อยากได้ยศตำแหน่งแข่งเวลา   ดวงชะตาแล้วแต่บุญจะหนุนนำ
พวกเราล้วนคนดีแต่มีบาป   ขอก้มกราบบูชาครูผู้อุปถัมภ์
ชีวิตต้องเบี่ยงเบนเพราะเวรกรรม   ไม่มีใครทำขีดขั้นจนบั้นปลาย
น. ๑๗ ได้เจ็ดพลอากาศเอก   จะปลุกเสกให้มากนั้นยากหลาย
ชีวิตอยู่มารอดเป็นยอดชาย   ไม่ถึงตายก็ดีแล้วพ่อแก้วตา
พลอากาศเอกทวนทอง ยอดอาวุธ   ท่านสูงสุดใครอย่าคิดริษยา
พลอากาศเอกพิสุทธิ์ ผ่องผุดปัญญา   แต่โรคามาทำให้กรรมบัง
พลอากาศเอกวาฑิตจิตไม่ว่าง   ท่านชอบสร้างค่านิยมให้สมหวัง
พลอากาศเอกประหยัดแรงจัดและโด่งดัง   สปิตร์ไฟร์พังรอดตายกลายเป็นดี
พลอากาศเอกเรวัตจัดว่ายอด   ท่านบินรอดรวดลายไม่หน่ายหนี
พลอากาศเอกประทีปถูกชนล่วงควงปฐพี   แต่ดวงดีร่มกางเกือบปางตาย
พลอากาศเอกประภานามปากกาเหยี่ยวเผือก   ดีแต่เปลือกไม่ยอมเล่นเส้นสาย
นิรภัยการบินอยู่รอดไม่วอดวาย   น่าเสียดายถ้าไม่เข้มงวดตรวจตรา
ได้พลอากาศโทหกเจ็ดคนบ่นว่าน้อย   ไม่ด่างพร้อยทุกคนสู้ชนฝ่า
เป็นพลอากาศตรีส่วนมากยากอุรา   เพราะบุญมาเลิศล้ำคอยค้ำจุน
ทุกคนเกษียณแล้วไม่แคล้วตาย   ลดวุ่นวายอดกลั้นไม่หันหุน
ทำความดีเป็นประจำทั้งทำบุญ   เพื่อเป็นทุนชาติหน้าถ้ามีจริง
พลอากาศเอกพิสุทธิ์มาพรากจากไปก่อน   หัวใจอ่อนไม่เหลือเป็นเสือสิงห์
พวกเราขอขมาอาลัยด้วยใจจริง   อย่าชังชิงแม้เคยล้อชื่อพ่อตน
ขออธิฐานวิญญาณเพื่อนที่เลือนลับ   ขอคำนับและอุทิศประสิทธิผล
ขอให้บุญบารมีทานบันดาลดล   สถิตย์เบื้องบนพ้นทุกข์เป็นสุขเทอญ.

อาลัยรัก พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นนายทหารอากาศชั้นผู้ใหญ่ที่มีความรู้ความสามารถสูง เป็นครูบาอาจารย์ที่มีลูกศิษย์ลูกหามากมาย บรรดาข้าราชการ ทหาร ตำรวจและพลเรือนที่ได้เคยร่วมงานกับท่านได้ให้ความเคารพรักและนับถือยิ่ง บรรดาผู้ที่เป็นเพื่อนฝูงก็มีความรัก ความสนิทสนมกับ พล.อ.อ.พิสุทธิ์เป็นอย่างดียิ่ง ทั้งในระหว่างที่รับราชการอยู่ ตลอดทั้งเมื่อท่านพ้นจากราชการไปแล้ว เมื่อท่านป่วยอยู่เป็นเวลานานจนกระทั่งถึงแก่อนิจกรรม ซึ่งก่อให้เกิดความเศร้าเสียใจอาลัยรักแก่ทุก ๆ คนที่เคยรู้จักและเคยร่วมงานกับท่านเป็นอันมาก

พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ได้เข้าเป็นนักศึกษา วปอ.รุ่นที่ ๑๖ ร่วมกับพวกเรารวม ๖๑ คน ซึ่งเพื่อนร่วมรุ่นก็ล้วนแต่เป็นข้าราชการชั้นผู้ใหญ่ทั้งพลเรือน ตำรวจ ทหารตลอดเวลาหนึ่งปีที่ร่วมศึกษาอยู่ด้วยกันใน วปอ. นั้น ปรากฏว่าท่านเป็นคนมีความเป็นกันเอง ให้ความสนิทสนม สนุกสนานและกลมเกลียวกับเพื่อนร่วมรุ่นทุกคนในการสัมมนาทางวิชาการต่าง ๆ นั้น พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ก็ได้ให้ความร่วมมือทำการค้นคว้าหาหลักฐานอย่างละเอียดและถว้างขวางมาชี้แจงให้เพื่อน ๆ ได้มีความรู้ความเข้าใจด้วยเป็นอย่างดี สมกับที่ท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิในระดับปริญญาเอก ท่านเป็นคนที่เห็นแก่หมู่คณะเป็นอย่างยิ่ง ในการไปดูงานต่างจังหวัดหรือต่างประเทศ ท่านก็ให้ความร่วมมือแก่เพื่อนนักศึกษาเป็นอย่างดียิ่งทั้งในด้านวิชาการ การสังคมและการบันเทิง พวกเรามีการพบปะเลี้ยงรุ่นกันทุกวันที่ ๑๖ ของเดือน พวกเรายังคงจำกันได้ดีว่าท่านเป็นผู้หนึ่งที่นำความสบายอารมณ์และสนุกสนานขบขันมาให้เพื่อน ๆ อยู่เสมอ เมื่อสำเร็จการศึกษาแล้วทุกคนก็แยกย้ายกันกลับไปทำงานตามตำแหน่งหน้าที่ พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ก็ยังมาร่วมพบปะสังสันท์ในงานเลี้ยงรุ่นทุกวันที่ ๑๖ ของเดือนอย่างสม่ำเสมอมิได้ขาด จนกระทั่งท่านล้มป่วยลง และในที่สุดท่านก็ต้องจากพวกเราไปอย่างไม่มีวันกลับ

จริงอยู่ แม้ว่าการเกิดแก่เจ็บตายจะเป็นปกติวิสัยของมนุษย์โลก แต่เพื่อน วปอ.รุ่น ๑๖ ก็อดที่จะเศร้าเสียใจอาลัยรักท่านมิได้ พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นผู้ที่สร้างสมแต่คุณงามความดีตลอดมา ทั้งครอบครัว ลูกศิษย์ลูกหาและเพื่อนฝูงย่อมมีความอาลัยรักและระลึกถึงท่านอยู่เสมอ ด้วยคุณงามความดีและกุศลผลบุญที่ท่านได้สร้างสมมา จงเป็นผลดลบันดาลให้ดวงวิญญาณของท่านไปสู่สุคติและสถิตเสถียร ณ แดนอันสุขสงบในสัมปรายภพเทอญ

ด้วยความรักและอาลัยจากเพื่อน

พล.ท. วศิน อิศรางกูร

(วศิน อิศรางกูร ณ อยุธยา)

ประธานนักศึกษาวิทยาลัยป้องกันราชอาณาจักร รุ่นที่ ๑๖

อาลัย พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

พวกเรารู้จักคุ้นเคยกับพล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี มาตั้งแต่ปี พ.ศ ๒๔๘๖ เพราะช่วงนั้นอยู่ในระหว่างสงครามโลกครั้งที่สอง พวกเราเรียนอยู่ร.ร.การเรือนพระนคร ร.ร.นายร้อยกับร.ร.ของเราอยู่ไม่ไกลกันนัก พวกเรามีเพื่อน ๆ เป็นนักเรียนนายร้อยหลายคนมีทั้งทหารบกเรือ และอากาศ คุณพิสุทธิ์เป็นนักเรียนนายทหารหนุ่มรูปหล่อ อารมณ์ดี ยิ้มแย้มแจ่มใส ร่าเริง และรู้จักคนง่าย ดังนั้นไม่นานนักพวกเราก็คุยถูกคอกัน และสนิทสนมกันราวกับคุ้นเคยมานานปี เมื่อต่างฝ่ายต่างเรียนจบ ก็แยกย้ายกันไปประกอบอาชีพตามที่ได้ร่ำเรียนมา บ้างก็รับราชการ บ้างก็ดำเนินธุรกิจส่วนตัว บ้างก็เป็นแม่บ้าน ภรรยาของคุณพิสุทธิ์เป็นเพื่อนรักที่แสนดีของเรามาตลอดตั้งแต่กินนอนด้วยกันมาในร.ร.สมัยเรียนด้วยกัน ทำให้เรามีความสัมพันธ์ของความเป็นเพื่อนกันอย่างแน่นแฟ้น มีการพบปะกันอยู่เสมอ ๆ พร้อมทั้งได้รับทราบความก้าวหน้า และประสบความสำเร็จในชีวิตราชการและส่วนตัวของเพื่อนอยู่เสมอด้วยความปลาบปลื้มใจตราบจนเกษียณอายุราชการ

คุณพิสุทธิ์ได้พบแพทย์เพื่อตรวจร่างกายอยู่เสมอ ๆ ระยะหลังจึงได้ทราบเจ็บป่วยพวกเราได้ไปเยี่ยมเยียนถามไถ่อาการอยู่เสมอ ๆ ซึ่งดูก็ไม่หนักหนาอะไร เพราะแพทย์คอยดูแลคุณพิสุทธิ์ตลอดเวลาอยู่แล้ว แต่กระนั้นก็ไม่วายที่โรคภัยไข้เจ็บจะเข้าครอบครองจนได้

ในตอนเช้าตรู่ของวันที่ ๘ ธ.ค. ๒๕๓๔ ซึ่งเป็นวันที่เรานัดพบกันเพื่อจะไปทำบุญอุทิศส่วนกุศลเป็นประจำให้แก่อาจารย์ และท่านผู้มีพระคุณที่ล่วงลับไปแล้ว ยังวัดสระปทุมวนาราม เราก็ทราบข่าวจากนิดซึ่งเป็นคู่ชีวิตของคุณพิสุทธิ์ทางโทรศัพท์ว่า คุณพิสุทธิ์ได้จากไปแล้ว พวกเราใจหาย และสะเทือนใจมาก คิดไม่ถึงว่าจะรวดเร็วอย่างนี้ พวกเราทราบดีว่า ความตายเป็นการหลุดพ้นจากการทรมานในโลกมนุษย์ ทำให้ผู้ตายเป็นสุขพ้นจากทุกข์ทรมานซึ่งเป็นเรื่องวิปโยคของครอบครัว ญาติมิตร คุณพิสุทธิ์เป็นผู้มีอัธยาศัยอันดีงาม เพียบพร้อมด้วยจิตใจโอบอ้อมอารี ทำให้คุณพิสุทธิ์เป็นที่รักนับถือของเพื่อน ๆ ยากที่จะลืมเลือนได้

ขอให้กุศลทักษิณาทานที่ภรรยา บุตร และญาติมิตรตลอดจนเพื่อน ๆ ได้บำเพ็ญเพื่ออุทิศกัลปผลตลอดจนกรรมดีที่คุณพิสุทธิ์ได้พากเพียรบำเพ็ญมาตลอดชีวิต จงสำเร็จเป็นประโยชน์เกื้อกูลให้เกิดกุศลผลบุญ บันดาลให้ไปสู่สุคติในสัมปรายภพทุกประการ

จากเพื่อน กร. ๙๐

ความสัมพันธ์กว่าครึ่งศตวรรษ

พิสุทธิ์, ลูกชายคนเดียวของคุณหญิงสอาดจิตต์และจอมพลฟื้น รณภากาศ ฤทธาคนี ได้ถึงแก่กรรมในวัยที่ยังไม่สมควร เสียดายความรู้ความสามารถ ตลอดจนความรอบรู้ที่มีอยู่ในตัวพิสุทธิ์ หวังว่าความรู้ต่าง ๆ ที่พิสุทธิ์ได้ถ่ายเทให้กับลูกศิษย์ลูกหาจะก่อประโยชน์ให้กับกองทัพอากาศและประเทศไทยอันเป็นที่รักด้วยในที่สุด

ครอบครัวอาขุนรณ (พวกเราเรียกท่านจอมพลฟื้น) และครอบครัวพิบูลสงคราม สนิทสนม เป็นทั้งผู้ใต้บังคับบัญชากันมาและเป็นเพื่อนกัน เคารพซึ่งกันและกันตลอดมาตั้งแต่ก่อนพ.ศ. ๒๔๘๐ คุณหญิงสอาดจิตต์ได้เป็นเพื่อนร่วมงาน คู่คิดของคุณแม่ (ท่านผู้หญิงละเอียด) ข้าพเจ้าได้เป็นหัวหน้านำภริยาคณะนายทหารอากาศเข้าร่วมสังสรรค์และทำงานสังคมสงเคราะห์ตลอดเวลาที่เป็นรัฐบาลด้วยกัน พิสุทธิ์และพวกเราจึงพลอยสนิทสนมรักพิสุทธิ์เหมือนน้องคนหนึ่ง พูดจาไม่ต้องเกรงใจกัน ข้าพเจ้าเห็นพิสุทธิ์ตั้งแต่เด็ก เข้ามาร่วมครอบครัวกันตั้งแต่ดูเหมือนพิสุทธิ์อายุเพียง ๕-๑๐ ขวบ ในราวพ.ศ. ๒๔๘๑ ข้าพเจ้าก็ติดตามความเจริญเติบโตของพิสุทธิ์มาเรื่อย ตั้งแต่เรียนในชั้นต้น ชั้นปลาย จนไปเรียนต่อเมืองนอก เข้ารับราชการในกองทัพอากาศ ได้ยินกิตติศัพท์ว่าเป็นนายทหารหัวดีมาก ได้ยินถึงกับว่า สมองพิสุทธิ์จะเป็น Computer ได้ เพราะอ่านหนังสือมาก และชอบอ่านหนังสือและสนใจในหนังสือเกี่ยวกับเครื่องจักร เครื่องยนต์สมัยใหม่ ๆ เสียด้วย ข้าพเจ้าชื่นชมและดีใจด้วยเมื่อปลายชีวิตได้มียศถึงพลอากาศเอก ซึ่งสูงสุดของกองทัพ

แค่นี้ก็พิสูจน์แล้วว่า พิสุทธิ์ต้องเป็นลูกที่ดี และได้มีชีวิตที่ดีขณะที่อยู่บนโลกนี้ สมกับที่เป็นลูกผู้ชายแล้ว

เสียดาย และเสียใจที่พิสุทธิ์ต้องจากไปก่อน พี่ขอให้วิญญาณของพิสุทธิ์จงประสบแต่สันติสุขในสัมปรายภพจงทุกประการ ความสัมพันธ์ฉันท์พี่น้องตลอดกว่าครึ่งศตวรรษนี้ คงจะอยู่ต่อไปตราบชั่วกาลปวสานต์

จีรวัสส์ ปันยารชุน

อาลัยพี่พิสุทธิ์

เราพบพี่พิสุทธิ์เมื่อ ๓๐ ปีก่อน ที่เมืองบอสตัน รัฐแมสซาชูเสทส์ สหรัฐอเมริกา ตอนที่พี่พิสุทธิ์ไปกับพี่นิด กลับไปเรียนต่อที่ MIT พี่พิสุทธิ์กลับไปเรียนครั้งนั้นเพื่อทำปริญญาที่ MIT เรียกว่า Engineering ซึ่งเป็นขั้นระหว่างปริญญาโทกับปริญญาเอก พี่พิสุทธิ์เรียนวิชา Aeronautical Engineering ตอนนั้นที่ MIT มีนักเรียนไทยอยู่ ๕ คน แต่ใน Boston และบริเวณรอบ ๆ มีคนไทยเรียนอยู่เกือบ ๑๐๐ คน

ตอนไปถึงใหม่ ๆ พวกเราช่วยหา apartment ให้พี่พิสุทธิ์และพี่นิดพักอยู่นอกโรงเรียน แต่ต่อมา MIT ได้สร้าง condominium สำหรับนักเรียนที่มีครอบครัวเสร็จ พี่พิสุทธิ์และพี่นิดจึงได้ย้ายเข้าไปอยู่คอนโดใหม่เอี่ยมนี้ คอนโดมิเนียมนี้ตั้งอยู่ริมแม่น้ำ Charles ในเมือง Cambridge ฝั่งตรงกันข้ามกับมหาวิทยาลัยบอสตัน ในจุดที่มีวิวสวยที่สุดแห่งหนึ่งในย่านบอสตัน พี่พิสุทธิ์เป็นคนที่เรียนเก่งมาก เลยได้เป็นที่พึ่งเสมือนขุมวิชาของน้อง ๆ ที่ MIT ในเรื่องการเรียนทุกด้าน บางทีเราทำข้อสอบที่อาจารย์ให้มาทำที่บ้านไม่ได้ เอาไปถามพี่พิสุทธิ์ พี่พิสุทธิ์ดู ๆ เดี๋ยวเดียวก็บอกคำตอบให้เลย โดยไม่ต้องเขียนอะไร และสามารถอธิบายวิธีทำให้พวกเราเข้าใจได้โดยง่าย พี่พิสุทธิ์ต้องเรียนหนักมาก แต่ก็มีเวลาให้พวกน้อง ๆ เสมอ คอนโดของพี่พิสุทธิ์กลายเป็นจุดศูนย์รวมของพวกเรานักเรียนไทยในแถบบอสตันในตอนนั้น พวกเราได้อาศัยใช้เป็นที่พบปะสังสรรค์ ทำอาหารไทยเลี้ยงกันอยู่ตลอดเวลา ทั้งนี้ก็โดยความโอบอ้อมอารีรักน้อง ๆ ของพี่พิสุทธิ์ ที่ได้กรุณาเอื้อเฟื้อต่อพวกเราทุกคน นอกจากนั้นพวกเราหลายคนยังได้รับประสพการณ์ในการเลี้ยงดูเด็กอ่อน จากการที่ไปช่วยพี่พิสุทธิ์และพี่นิดเลี้ยงหลานที่ไปเกิดที่นั่นทั้ง ๒ คนอย่างสนุกสนานกันอีกด้วย

เมื่อเรียนจบกลับกันมาแล้ว ถึงแม้ว่าจะไม่ค่อยได้พบกันบ่อยนัก พวกเราก็ยังระลึกถึงและชื่นชมยินดีในความสำเร็จก้าวหน้าในชีวิตราชการของพี่พิสุทธิ์ตลอดมา การจากไปของพี่พิสุทธิ์เป็นการสูญเสียบุคคลอันเป็นที่รักยิ่งของพวกเรา พวกเราทุกคนขอตั้งจิตอธิษฐาน ขอให้อำนาจคุณพระศรีรัตนตรัยและสิ่งศักดิ์สิทธิ์ทั้งหลาย ตลอดจนคุณงามความดีที่เคยทำมา ได้ดลบันดาลให้ดวงวิญญาณของพี่พิสุทธิ์ไปสู่สุคติด้วยเทอญ

น้อง ๆ บอสตัน ปี ๑๙๖๒-๖๔

๖ กุมภาพันธ์ ๒๕๓๕

เมื่อ ๓๐ ปีที่แล้วที่บอสตัน พี่นิดและพี่พิสุทธิ์ได้เป็นผู้ดูแลป้าใหญ่และน้อง ด้วยความรัก และเอาใจใส่ทำให้เรามีความรู้สึกผูกพันกันมาจนถึงทุกวันนี้ ถึงแม้เมื่อกลับมาเมืองไทยแล้วจะไม่ค่อยได้พบปะกันก็ตาม

ขอให้พี่พิสุทธิ์จงประสพแต่ความสุขในสัมปรายภพและด้วยผลบุญกุศลที่ได้ประกอบมา จงนำวิญญาณของพี่พิสุทธิ์ให้ถึงซึ่งมรรคผลนิพพานในกาละอันสมควรด้วยเถิด

ภัทรา ศิลาว่อน

ระลึกถึง พล.อ.อ. ศ. ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

เมื่อเช้าวันที่ ๑๐ ธันวาคม ๒๕๓๔ ผมได้ทราบข่าวการถึงแก่อนิจกรรมของท่านอาจารย์พิสุทธิ์ฯ (พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี) เป็นข่าวการจากไปโดยที่คาดไม่ถึงมาก่อนเลย ความรู้สึกในขณะนั้นทั้งตกใจเศร้าสลดและอาลัยเป็นอย่างยิ่ง ผมยังจำได้ว่า เมื่อวันที่ ๑๔ มิถุนายน ๒๕๓๔ ซึ่งเป็นวันคล้ายวันเกิดของท่านอาจารย์ครั้งหลังสุด พวกเราชาวศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ กองทัพอากาศ (ศวอ.ทอ.) ซึ่งเคยทำงานใกล้ชิดและบุกเบิกร่วมงานกันมากับท่าน และคณะอาจารย์จากโรงเรียนนายเรืออากาศ (รร.นอ.) ซึ่งเคยทำงานร่วมมากับท่านอาจารย์ ได้มีโอกาสไปกราบเยี่ยมคารวะในฐานะที่ท่านอาจารย์เคยเป็นทั้ง "ครู" และผู้บังคับบัญชาในอดีตมาก่อน ท่านอาจารย์ยังบอกกับผมและเพื่อน ๆ เลยว่าถ้าว่าง ๆ มีโอกาสให้แวะมาคุยกันบ้าง ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าท่านอาจารย์มักจะถามถึงหน้าที่การงาน ความเจริญก้าวหน้าแต่ละคนและของหน่วยงานตลอดจนความเจริญก้าวหน้าในทางเทคโนโลยีด้านต่าง ๆ ที่ท่านอาจารย์คิดว่าน่าจะเกี่ยวข้องกับ ศวอ.ทอ. และกองทัพอากาศ ส่วนรวมโดยเฉพาะอย่างยิ่งด้านคอมพิวเตอร์, อากาศยาน, และ ระบบอาวุธ ที่ทันสมัย เพราะในปัจจุบันนี้ การทำงานของระบบดังกล่าวจะใช้คอมพิวเตอร์ ควบคุมการทำงานทั้งสิ้น ในวันนั้นพวกเราได้อยู่คุยกับท่านอาจารย์และครอบครัวของท่านนานพอสมควรแล้วจึงได้ลากลับ พวกเรายังได้เรียนท่านและคุณพี่ ฤดี ฤทธาคนี ว่าหากมีอะไรจะให้พวกผมรับใช้ก็ขอให้บอกเด็กที่บ้านท่านโทรศัพท์มาเลย ไม่ต้องเกรงใจพวกเรายินดีจะรับใช้ท่านเสมอ และประโยคสุดท้ายที่พวกเราเรียนท่านอาจารย์ว่า "แล้วพวกกระผมจะมาเยี่ยมท่านอาจารย์อีก" ซึ่งพวกเราก็ยังไม่มีโอกาสได้ไปเยี่ยมท่านอาจารย์เลย เนื่องจากหน้าที่การงานที่ได้รับมอบหมายจนกระทั่งมาได้ข่าวการจากไปของท่านอาจารย์จึงเป็นการพบท่านครั้งสุดท้ายในวันนั้นเอง

ผมได้มีโอกาสทำงานร่วมกับท่านอาจารย์ พิสุทธิ์ ฤทธาคนี มาเป็นเวลาช้านาน คือตั้งแต่ผมจบการศึกษา สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จาก OREGON STATE UNIVERSITY สหรัฐอเมริกา กลับมาเมื่อ พ.ศ. ๒๕๑๘ ได้มารับราชการเป็นผู้ใต้บังคับบัญชาของท่านในตำแหน่งอาจารย์กองวิชาเทคนิค โรงเรียนนายเรืออากาศ ซึ่งขณะนั้นท่านอาจารย์มีตำแหน่ง เป็นผู้อำนวยการกองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ ต่อมาในปี พ.ศ. ๒๕๑๙ ผมได้มีโอากาสทำงานอีกชิ้นหนึ่งร่วมกับท่านอาจารย์ คือท่านเป็นหัวหน้าคณะชุดทำงานในการพิจารณาและดำเนินการจัดตั้งศูนย์คอมพิวเตอร์ ของ กองทัพอากาศ โดยมี น.ต.สุนทร ขำประไพ (ยศขณะนั้น) เป็นเลขานุการของคณะชุดทำงาน และมี น.ต.จุฌณวัฒน์ กิติเวช (ยศขณะนั้น) เป็นผู้รับผิดชอบงานด้านธุรการส่วนนักวิเคราะห์ระบบและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในขณะนั้นเรามีอยู่ประมาณ ๕-๖ คนเท่านั้น มี ร.อ.หญิง พิไลวรรณ ภัทรเสน (ยศขณะนั้น) มีหน้าที่รับผิดชอบ และมี ร.ท.กิตติ พูลเกษ (ยศขณะนั้น ปัจจุบันได้ย้ายไปอยู่ศูนย์คอมพิวเตอร์ของบริษัทปูนซีเมนต์ไทย) เป็นผู้ช่วย ศูนย์คอมพิวเตอร์ของ กองทัพอากาศ ได้ถูกจัดตั้งขึ้นโดยเป็นอัตราเพื่อพลางอยู่ระยะหนึ่งและต่อมาได้เป็นอัตราจริงเมื่อปี พ.ศ. ๒๕๒๕ มีชื่อว่า "สำนักงานวิจัยระบบคำนวณ" เป็นส่วนราชการขึ้นตรงต่อ "ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ กองทัพอากาศ (สวค.ศวอ.ทอ.) โดยมีท่านอาจารย์ พล.อ.ท.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี (ยศขณะนั้น) เป็นผู้บัญชาการศูนย์วิทยาศาสตร์ และพัฒนาระบบอาวุธกองทัพอากาศ เป็นคนแรก งานด้านคอมพิวเตอร์ในขณะนั้นแม้ว่าจะเป็นระยะเริ่มก่อตั้งก็จริงแต่ก็นับว่ามีความเจริญก้าวหน้าไปมาก ทัดเทียมกับศูนย์คอมพิวเตอร์ มาตรฐานอื่น ๆ ที่มีอยู่ในประเทศไทยในขณะนั้น ตลอดจนความทัดเทียมในด้านเทคโนโลยีของ Main Frame ที่มีอยู่ในสมัยนั้น เพราะในสมัยนั้นศูนย์คอมพิวเตอร์ ที่มีขีดความสามารถใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ Main Frame มีไม่กี่แห่ง เช่น สวค.ศวอ.ทอ., ศกม.บก.สูงสุด, จุฬา-

ลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ธนาคารกรุงเทพ, สำนักงานสถิติแห่งชาติ, ธนาคารไทยพาณิชย์, AIT, และที่อื่น ๆ อีก ๓-๔ แห่งเท่านั้น ผลงานด้านคอมพิวเตอร์ของ สวค.ศวอ.ทอ. ในขณะนั้นนับว่าเป็นที่เชื่อถือจากผู้บังคับบัญชาชั้นสูงมาก จนเป็นเหตุให้ ผู้บังคับบัญชาระดับสูงของ ทอ.มีแนวความคิดที่จะนำเอาคอมพิวเตอร์เข้ามาใช้ในงานต่าง ๆ ของ ทอ.อีกหลายด้านในเวลาต่อมาอาทิเช่น

๑. เครื่องทดสอบความแข็งแรงของโครงสร้างและปีกของอากาศยานของ ชอ.ต่อมาได้โอนให้สำนักงานวิศวกรรมอากาศยาน ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ กองทัพอากาศ (สวย.ศวอ.ทอ.) รับผิดชอบ

๒. เครื่องฝึกบินจำลองเพื่อใช้ในการฝึกซ้อมนักบินพร้อมรบ (F-5E Weapon Simulator) ซึ่งติดตั้งใช้งานที่ กองบิน ๑ (โคราช)

๓. เครื่องมือช่วยในการเขียนแบบเพื่อใช้ในการออกแบบอากาศยานหรือเรียก CAD (Computer Aided Design) ที่ สวย.ศวอ.ทอ.

๔. เครื่องกลึงที่มีการควบคุมด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ (Numerical - Control - Lathe) หรือ เรียกว่า CAM (Computer -Aided - Manufacturing) ติดตั้งใช้งานอยู่ สพอ.ศวอ.ทอ.

๕. ระบบป้องกันทางอากาศ (Royal Thai Air Defense System หรือระบบ RTADS) เป็นระบบป้องกันทางอากาศ ชนิดที่มีการคำนวณข้อมูลของการป้องกันทางอากาศอย่างต่อเนื่องและต้องการผลการคำนวณทันทีทันใด (Read time Computing System) ดังนั้นหัวใจสำคัญของระบบ RTADS ก็คือคอมพิวเตอร์ ๓ ชุด (String) ที่ AOC (Air Operation Center) นั้นเอง โดยเฉพาะโครงการนี้เราอาจจะพูดได้ว่าท่านอาจารย์พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เป็นผู้ริเริ่มท่านหนึ่งที่สำคัญ และท่านยังได้รับแต่งตั้งให้เป็นประธานคณะอนุกรรมการของโครงการ RTADS ในระยะต้น ๆ อีกด้วย มีหน้าที่กำหนด System Configuration และ System Specification และผมเป็นคนหนึ่งที่ได้มีโอกาสทำงานอย่างใกล้ชิดกับท่านอาจารย์ จนโครงการนี้เสร็จเรียบร้อยในที่สุด

ตลอดเวลาที่พวกเราทำงานใกล้ชิดกับท่านอาจารย์มาโดยตลอด จะเห็นได้ว่าท่านได้ให้ความเป็นกันเองมีอารมณ์ร่าเริง และได้อนุเคราะห์เกื้อหนุนแก่ผู้ร่วมงานเป็น "ผู้ให้" มาโดยตลอดโดยยึดถือความยุติธรรมเป็นหลัก พวกเราทุกคนเรียกท่านว่า "ท่านอาจารย์ พิสุทธิ์ฯ" จนติดปากด้วยความเคารพนับถือท่าน นอกจากนี้ท่านยังได้มีส่วนร่วมงานราชการอื่น ๆ ด้วยความยินดีและทุ่มเท ได้สร้างประโยชน์แก่หน่วยงานต่าง ๆ ที่ท่านได้มีโอกาสไปร่วมอย่างมากเช่น ที่โรงเรียนนายเรืออากาศ และที่ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธกองทัพอากาศ เป็นต้น ได้สร้างความเป็นปึกแผ่น และความเจริญก้าวหน้าให้แก่กองทัพเป็นอย่างมากสมกับที่ได้รับการยกย่องว่าท่านเป็น "ปูชนียบุคคล"ของกองทัพอากาศ อีกท่านหนึ่ง

หลังจากที่ท่านอาจารย์ได้เกษียณอายุไปแล้ว พวกเราและท่านยังติดต่อกันอยู่เสมอ โดยท่านสั่งให้พวกเราไปหา หรือมิฉะนั้นท่านก็จะมาแวะเยี่ยมพวกเราก่อนที่ท่านจะไปตัดผมที่โรงเรียนนายเรืออากาศเป็นประจำ แต่การมาทุกครั้ง ท่านอาจารย์จะติดหนังสือ MILITARY TECHNOLOGY และ MILITARY SIMULATION & TRAINING (MTS) มาให้พวกเราผู้สนใจอ่านเกือบทุกครั้งและสั่งไว้ว่าเมื่ออ่านเสร็จแล้วขอมอบให้เป็นสมบัติส่วนกลางที่ห้องสมุด ศวอ.ทอ. จะเห็นได้ว่าท่านเป็น "ผู้ให้" มาโดยตลอด และพยายามพัฒนาทรัพยากรบุคคลของ ทอ. ในส่วนที่ท่านได้เคยเกี่ยวข้องให้มีความรู้ทันสมัยอยู่เสมอ แม้ว่าจะออกจากราชการไปแล้วก็ตาม

พวกเราชาว ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธกองทัพอากาศ ทุกคน ต่างรู้สึกเศร้าเสียใจที่ท่านอาจารย์ พล.อ.อ.ศ.ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ต้องมาด่วนจากไป นับเป็นการสูญเสียปูชนียบุคคลที่รักและเคารพยิ่งของเราไป พวกเรารู้สึกภูมิใจในผลงานของท่านที่ได้ร่วมงานกับท่านมาจะเจริญรอยตามในการสร้างผลงานของท่านและระลึกถึงท่านเสมอตลอดไป ขอให้ผลแห่งคุณงามความดีของท่าน จงดลบันดาลให้วิญญาณของท่านไปสู่สุคติเถิด

"ปูชจปูชนียานํ เอตมฺมงฺคลมุตฺตมํ"

หนึ่งกราบและบูชา อภิปูชนียชน

ข้อนี้แหละมงคล อดิเรกอุดมดี

นาวาอากาศเอก ดร.ชูลิต มีสัจจี

ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ

กองทัพอากาศ

๒๔ ม.ค.๓๕

ท่านอาจารย์กับกองทัพอากาศ

โดย น.อ.สุนทร ขำประไพ

ผมเขียนเรื่องนี้ขึ้น เพื่อระลึกถึงท่านอาจารย์ซึ่งใคร ๆ ซึ่งเป็นลูกศิษย์ลูกหาของท่านเรียกอย่างงั้น ท่านอาจารย์ที่ว่านี้คือ ศาสตราจารย์ พล.อ.อ. ดร.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ซึ่งบัดนี้ท่านอาจารย์ของเราผู้นี้ได้จากพวกเราไปสู่สัมปรายภพเสียแล้ว ท่านจากพวกเราไปเร็วเหลือเกินกว่าที่คาดคิด จนพวกเราที่เป็นลูกศิษย์และผู้ใกล้ชิดของท่าน ตลอดจนบรรดาญาติมิตรและสหายของท่านต้องตกใจไปตาม ๆ กัน เมื่อทราบข่าวว่าท่านอาจารย์ของเราได้จากพวกเราไปเสียแล้ว เมื่อคืนวันที่ ๗ ธ.ค. ๓๔ ซึ่งยังความเศร้าสลดใจแก่พวกเราเป็นอย่างยิ่ง จนเกินกว่าที่พวกเราจะพรรณนาไว้ที่นี้ได้ ขอดวงวิญญาณของท่านอาจารย์ของพวกเรา จงไปสู่สุขคติที่สรวงสวรรค์ และเสวยสุขตามที่ท่านปรารถนาลงทุกประการเทอญ

ผมได้เข้ามาอยู่ในรั้วสีเทา เมื่อปี ๒๔๘๘ ในฐานะนักเรียนนายเรืออากาศ รุ่นที่ ๓ ซึ่งขณะนั้นผมก็ได้ยินชื่อของท่านอาจารย์แล้วว่า ท่านอาจารย์เป็นบุตรชายคนโตของท่านแม่ทัพฟ้า (สมัยนั้นนิยมเรียกอย่างนั้น หรือผู้บัญชาการกองทัพอากาศในปัจจุบัน) คือ จอมพลอากาศฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี ซึ่งขณะนั้นท่านอาจารย์เพิ่งจบปริญญาโทจากมหาวิทยาลัยในสหรัฐอเมริกาถึง ๒ แห่งด้วยกัน คือจบจากมหาวิทยาลัยวอชิงตัน ในสาขาอากาศพลศาสตร์ (AERODYNAMICS) กับสถาบันเทคโนโลยีแห่ง แมสซาชูเสทซ์ (MASSACHUSETTE INSTITUTE OF TECHNOLOGY) ในสาขา INSTRUMENTATION & CONTROL ซึ่งนับว่าท่านอาจารย์เป็นบุคคลแรกในกองทัพอากาศหรือประเทศไทยก็ยังได้ ซึ่งไม่เคยปรากฏว่าผู้ใดเคยจบปริญญาสาขานี้มาก่อนเลย และท่านอาจารย์เป็นบุคคลเดียวที่จบจาก M.I.T. ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยหนึ่งในสิบมหาวิทยาลัยชั้นยอดของสหรัฐ (TOPTEN) นอกจากนี้ท่านยังจบหลักสูตร AIRCRAFT MAINT. OFFICER COURSE ที่ CHANUTE AFB และจบการบินเฮลิคอปเตอร์จากบริษัท SIKORSKY AIRCRAFT CO. อีกด้วย และดูเหมือนว่า ท่านเป็นบุคคลเดียวเหมือนกันที่ไม่เคยติดยศเรืออากาศเอกเลยคือจากเรืออากาศโท เป็นนาวาอากาศตรี และท่านก็เป็นบุคคลเดียวเหมือนกันที่เป็นนายพลอากาศที่จบปริญญาเอกในสาขา STRUCTURAL ENGINEERING จากมหาวิทยาลัยแมรี่แลนด์ และ POST DOCTORAL DEGREE จาก M.I.T. อีกด้วย นับว่าท่านอาจารย์เป็นปรมาจารย์ของพวกเราอย่างแท้จริง และยากที่ผู้ใดจะเปรียบเทียบกับท่านได้ในด้านวิชาการแทบทุกสาขา แม้แต่กระทั่งวิชาการทางด้านคอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นวิชาการยุคไฮเทคในปัจจุบัน ซึ่งผมเองก็เคยได้รับมอบหนังสือเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์เกือบสิบเล่มและหนังสือเกี่ยวกับอาวุธนำวิถี ซึ่งผมเคยเป็นลูกศิษย์เหล่าสรรพาวุธชั้นปีที่ ๔ และ ๕ ท่านก็มอบให้ ซึ่งผมเองซาบซึ้งในบุญคุณของท่านเป็นอย่างมากจนเกินกว่าที่ผมจะพรรณนาไว้ ณ ที่นี้ได้อย่างหมดสิ้น และท่านก็สั่งสอนผมในเรื่องต่าง ๆ มากมาย ทั้งในเรื่องวิชาการ เรื่องส่วนตัว และประสบการณ์ต่าง ๆ ในการทำงาน การเรียนทั้งใน รร.เทคนิคทหารบก และมหาวิทยาลัยในต่างประเทศ ตลอดจนชีวิตความเป็นอยู่ขณะทำปริญญาเอก ในช่วงหลังเพราะท่านอายุมากแล้ว และมีลูกหญิง และลูกชายอย่างละ ๑ คน ซึ่งท่านเล่าให้ผมฟังว่า ครูต้องเลี้ยงลูก ขณะที่แม่บ้านต้องทำกับข้าว พอลูกนอนหลับท่านก็ต้องดูหนังสือ ทำการบ้าน ทำวิทยานิพนธ์ และค้นคว้าตำหรับตำรามากมาย ด้วยเหตุนี้นี่เองที่บ้านของท่านจึงมีหนังสือมากมายนับพันเล่ม นับเป็นห้องสมุดทางด้านวิชาการ โดยเฉพาะตำราด้านวิศวกรรมศาสตร์เกือบทุกสาขาท่านซื้อไว้เกือบหมด ซึ่งผมเคยเรียนถามท่านว่า ทำไมอาจารย์จึงซื้อหนังสือเหล่านี้มากมาย ท่านก็ตอบว่า ตอนที่ครูเรียนนั้นครูไม่มีเวลาที่จะไปค้นคว้าในห้องสมุดของมหาวิทยาลัย เพราะครูมีภาระทางครอบครัว ครูจึงซื้อตำรามาอ่านเองที่บ้านตามที่อาจารย์ของท่านมอบหมาย ซึ่งหนังสือตำหรับตำราที่บ้านของท่านขณะนี้ ผมคาดว่าถ้าคิดเป็นเงินไทยก็คงจะหลายแสนบาททีเดียว

ในฐานะที่ท่านอาจารย์รับราชการในกองทัพอากาศมาจนกระทั่งเกษียณอายุราชการ ท่านมีความผูกพันกับกองทัพอากาศอยู่ ๒ หน่วยงานด้วยกัน คือโรงเรียนนายเรืออากาศ กับศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ กองทัพอากาศ ซึ่งทั้งสองหน่วยงานนี้ ท่านได้ทุ่มเทผลงานของท่านไว้มากมาย ทั้งด้านการสร้างสรรค์ และปูพื้นฐานความรู้ทางวิชาการให้กับรร.นายเรืออากาศให้รุ่งโรจน์จวบจนกระทั่งปัจจุบันนี้ ครั้นพอท่านมาสร้างศูนย์คอมพิวเตอร์ของกองทัพอากาศร่วมกับลูกศิษย์ของท่าน ท่านก็นำความเจริญมาให้กับศูนย์ฯ มากมาย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง สำนักงานระบบคำนวณ ซึ่งเกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์โดยตรงของกองทัพอากาศ ท่านก็สร้างความเจริญไว้มากมาย รวมทั้งจัดหาทุนให้ผู้ใต้บังคับบัญชาดูงานทั้งในและต่างประเทศกันมากต่อมาก ในที่นี้ผมจะได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของท่านอาจารย์กับโรงเรียนนายเรืออากาศดังกล่าวต่อไปนี้

ความผูกพันกับโรงเรียนนายเรืออากาศ

หลังจากที่ท่านจบการศึกษาจากสหรัฐฯ ในด้านการบินเฮลิคอปเตอร์ ปริญญาโทจากมหาวิทยาลัยวอชิงตัน และ เอ็มไอที ตลอดจนหลักสูตรนายทหารซ่อมบำรุงจากฐานทัพอากาศชานุท เมื่อปี ๒๔๘๖ ซึ่งในระยะนั้น รร.นายเรืออากาศกำลังก่อตั้งพอดี ท่านอาจารย์จึงเป็นผู้หนึ่งที่เป็นกรรมการร่างหลักสูตรของรร.นายเรืออากาศขึ้น และท่านก็ได้รับบรรจุเป็นอาจารย์ประจำรร.นายเรืออากาศอยู่ด้วย ซึ่งในครั้งกระนั้นความมุ่งหมายของกองทัพอากาศต้องการให้ นนอ.รุ่นแรก เป็นนักบินทั้งหมด ฉะนั้นหลักสูตรจึงมุ่งเน้นทางด้านการบินเสียเป็นส่วนใหญ่วิชาการทางด้านวิศวกรรมศาสตร์มีอยู่บ้างแต่ไม่เข้มข้น ท่านอาจารย์จึงได้ปรับปรุงหลักสูตรเสียใหม่ ตั้งแต่ นนอ.รุ่นที่ ๒ เป็นต้นมา ให้เพิ่มเหล่าเทคนิคอีก ๓ เหล่า คือ ช่างอากาศสื่อสาร และสรรพาวุธ กับเหล่ารบอีก ๑ เหล่าคืออากาศโยธินซึ่ง นนอ.รุ่น ๒ จึงมีครบทุกเหล่าคือนักบิน และต้นหน, ช่างอากาศ, สื่อสาร, สรรพาวุธ และอากาศโยธิน ต่อมาถึงนนอ.รุ่นที่ ๓ เป็นต้นมา เหล่านักบินและต้นหนกับอากาศโยธินไม่มี คงเหลือแต่เพียงเหล่าเทคนิค ๓ เหล่าเท่านั้น เพราะท่านอาจารย์ให้เหตุผลว่า ถ้าจะให้ นนอ. เหล่านักบินไปบินแล้วเกิด WASH-OUT ขึ้นมาจะไปทำอะไร เพราะความรู้ทางด้านเทคนิคน้อยมาก และเหล่าอากาศโยธินก็เช่นกัน ท่านจึงให้มีเหล่าเทคนิคเพียง ๓ เหล่าเท่านั้น เพราะนนอ.เหล่านี้ก็สามารถจะไปฝึกบินภายหลังได้ ซึ่งก็เป็นความจริงดั่งที่ท่านอาจารย์คาดคิดไว้ เพราะนนอ.ทุกคนที่จบการศึกษามีสิทธิตรวจโรคไปบินกันทุกคน และท่านก็คาดคิดว่าถ้าผู้ใดไปบินแล้วเกิด WASH-OUT กลับมาก็สามารถจะไปอยู่เหล่าเทคนิคที่ตนเรียนได้

สำหรับเหล่าเทคนิค ๓ เหล่านั้น ดูเหมือนว่าท่านอาจารย์จะใกล้ชิดกับเหล่าสรรพาวุธมากที่สุด เพราะท่านสอนวิชาต่าง ๆ ในเหล่าสรรพาวุธแทบทุกวิชาอาทิเช่น WEAPONS SYSTEMS, CONTROL AND GUIDANCE SYSTEM, GYROKINETICS, FIRE CONTROL SYSTEM, MISSILE AERODYNAMICS, ADVANCE MATHEMATICS, SERVOMECHANICS เหล่านี้เป็นต้น และทุกวันที่ท่านสอนมักจะมาก่อนนักเรียนเข้าห้องเรียนเสมอ ๆ เพราะนักเรียนกว่าจะทานข้าว และเดินแถวมายังตึกเรียนต้องใช้เวลาประมาณ ๑๐ นาที แต่ท่านอาจารย์มาถึงก่อนแล้ว แต่ท่านก็ไม่ว่าอะไร เพราะท่านเคยเป็นนักเรียนนายร้อยมาก่อน เรื่องนี้ท่านทราบดี

ในส่วนตัวของผมนั้น ผมได้ใกล้ชิดกับท่านก็เพราะผมเรียนเหล่าสรรพาวุธ และท่านมักจะใช้ผมให้เขียนบนกระดานดำแทบทุกครั้งจนทำให้ผมชินจวบจนกระทั่งทุกวันนี้ ที่ผมสอนลูกศิษย์ของผมทั้งในมหาวิทยาลัย และวิทยาลัยตลอดจน รร.หลักสูตรต่าง ๆ ของกองทัพอากาศหลายต่อหลายแห่ง ซึ่งทำให้ผมมีความชำนาญก็เพราะท่านอาจารย์ใช้ให้ผมเขียนบนกระดานดำบ่อย ๆ นั่นเอง

ท่านอาจารย์เป็นผู้ที่สนับสนุนให้อาจารย์รร.นายเรืออากาศไปศึกษาในระดับปริญญาโท และเอก ทั้งในประเทศ และต่างประเทศ เพราะท่านเล็งเห็นว่า สมัยนั้นอาจารย์ที่สอนนนอ. จบระดับปริญญาตรีเท่านั้น ซึ่งยังไม่เป็นการเพียงพอ และขาดประสบการณ์ทางวิชาการใหม่ ๆ ท่านจึงได้ดำเนินการขอทุน ทอ. ให้กับอาจารย์ รร.นายเรืออากาศ โดยเฉพาะไปศึกษายังต่างประเทศทั้งในสหรัฐอเมริกา และยุโรป ในระดับปริญญาโท และเอก ซึ่งส่วนใหญ่จะไปศึกษาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์สาขาต่าง ๆ เช่น สาขาวิศวกรรมอากาศยาน, วิศวกรรมไฟฟ้า, วิศวกรรมอิเลคโทรนิคส์, การวิจัยเชิงปฏิบัติการ, วิศวกรรมการบริหาร, การวิเคราะห์ระบบ, คอมพิวเตอร์ศาสตร์, วิศวกรรมอุตสาหการ, คณิตศาสตร์, ฟิสิกส์ และเคมี ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น นอกจากนี้ท่านยังสนับสนุนให้อาจารย์ในรร.นายเรืออากาศไปศึกษาในสถานศึกษาภายในประเทศทั้งโดยทุนทอ. และทุนส่วนตัวกันหลายคน เช่นศึกษาวิชาคณิตศาสตร์, คอม-พิวเตอร์ศาสตร์, ครุศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์, วิศวกรรมอุตสาหการ, วิศวกรรมนิวเคลียร์และเทคโนโลยี, สถิติ, วิศวกรรมสิ่งแวดล้อม ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และ มหาวิทยาลัยมหิดล ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น นอกจากนี้ท่านยังส่งอาจารย์รร.นายเรืออากาศบางคนไปศึกษาที่ A.I.T. (ASIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY) โดยทุน ทอ.อีกด้วย จนทำให้ขณะนี้อาจารย์รร.นายเรืออากาศมีคุณวุฒิปริญญาโทและเอกกันแทบทุกท่าน จะเหลือก็เฉพาะที่เพิ่งบรรจุเป็นอาจารย์ใหม่ ๆ เท่านั้น

นอกจากท่านจะสนับสนุนอาจารย์ให้ไปศึกษาระดับปริญญาโทหรือเอกแล้ว ทุนอื่น ๆ อาทิเช่น ทุน I.M.E.T.P., ทุน DCP, ทุนการศึกษาดูงานในด้านต่าง ๆ ท่านอาจารย์ก็สนับสนุนให้อาจารย์รร.นายเรืออากาศได้ไปศึกษาดูงานด้านคอมพิวเตอร์ ด้านบริหารการศึกษา ด้านการทดลองอุโมงค์ลม ณ ต่างประเทศ ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น จริงอยู่ ทุนต่าง ๆ ที่ท่านอาจารย์หาให้อาจารย์รร.นายเรืออากาศไปศึกษาดูงานนั้นจะไม่เกี่ยวข้องกับรร.นายเรืออากาศโดยตรงก็จริง แต่ท่านอาจารย์ก็สามารถทำได้ เช่นให้อาจารย์รร.นายเรืออากาศไปศึกษาดูงานด้านคอมพิวเตอร์ ท่านก็แฝงไปกับทุนของ ศวอ.ทอ. (ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธกองทัพอากาศ) ทุนไปดูงานด้านอุโมงค์ลม ก็แฝงไปกับทุนโครงการจัดหาเครื่องบิน ทุนไปศึกษาดูงานด้าน IRSCANNER ก็แฝงไปกับทุนของโครงการณ์การลาดตระเวนทางอากาศในเวลากลางคืนด้วยระบบอินฟราเรด ทุนการศึกษาดูงานด้านการทดสอบความถนัดก็แฝงไปกับทุนการศึกษาดูงานด้านการทดสอบและการคัดเลือกศิษย์การบิน ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น ซึ่งกล่าวได้ว่าทุนไปศึกษาดูงานตามโครงการต่าง ๆ ของ ทอ.นั้น ถ้าท่านอาจารย์เป็นกรรมการด้วยละก็ท่านอาจารย์ต้องนึกถึงอาจารย์รร.นายเรืออากาศก่อนเสมอ ทั้งอาจารย์ที่เคยเป็นลูกศิษย์ลูกหาของท่านมาก่อน และอาจารย์ที่มาจากมหาวิทยาลัยซึ่งส่วนใหญ่เป็นอาจารย์หญิง แต่ท่านก็ถือว่าเป็นลูกศิษย์ของท่านเหมือนกัน ท่านก็จัดสรรหาทุนให้ได้ไปเสมอ ๆ แทบทุกคน แม้กระทั่งอุปกรณ์ในห้องแลปฟิสิกส์ ของรร.นายเรืออากาศท่านก็จัดสรรหาเครื่องมือทดลองแสงเลเซอร์มาให้โดยแฝงอยู่ในทุนดูงานด้านคอมพิวเตอร์ของศวอ.ทอ. ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น

นี่แหละครับ เป็นส่วนหนึ่งของท่านอาจารย์ที่มีความผูกพันกับรร.นายเรืออากาศซึ่งก็คือความผูกพันกับกองทัพอากาศนั่นเอง

แด่ท่านอาจารย์ที่รักและเคารพ

เมื่อผมได้ทราบข่าวถึงการจากไปของท่านอาจารย์ (พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี) ความรู้สึกส่วนตัว ในฐานะที่ผมคือทส.คนสุดท้ายของท่าน ตั้งแต่ปี พ.ศ. ๒๕๒๘ จนกระทั่งถึงปี พ.ศ. ๒๕๓๐ ที่ท่านได้เกษียณอายุราชการไป ผมรู้สึกใจหาย และเสียใจ สำหรับการจากไปของบุคคล ที่เปรียบเสมือนผู้บังคับบัญชา และครูผู้มีพระคุณ และในฐานะนายทหารอากาศ ผมรู้สึกเสียดาย ในบุคคลซึ่งได้ทำคุณประโยชน์ให้กับกองทัพอากาศของเราอย่างมากมาย เกินกว่าที่ผมจะอธิบายได้ทั้งหมด

ในช่วงชีวิตของผม ผมได้มีโอกาสรู้จัก น.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี เมื่อผมได้เข้าเป็นนักเรียนนายเรืออากาศในปี พ.ศ. ๒๕๑๔ ผมรู้ว่าท่านคือทายาทของ จอมพลอากาศ ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี ผู้ก่อตั้งโรงเรียนนายเรืออากาศขึ้น และท่านผู้เป็นทายาทได้มีส่วนในการจัดหลักสูตรการเรียน ของโรงเรียนนายเรืออากาศ จากการที่ท่านเป็นผู้รอบรู้ และอุทิศตัวในการศึกษาด้านวิศวกรรมอย่างจริงจัง เพื่อนำเทคโนโลยี่สมัยใหม่ ที่ก้าวหน้าไปทุกขณะมาพัฒนากองทัพอากาศของเรา

ผมมีโอกาสได้รู้จักกับท่าน จากการที่ผมได้ทุนเพื่อไปศึกษาต่อที่ประเทศเยอรมันนี และท่านคือบุคคลที่ติดต่อกับกองทัพอากาศเยอรมัน จนกระทั่งกองทัพอากาศเยอรมัน ได้มอบทุนสำหรับนักเรียนนายเรืออากาศไทย ท่านได้ดูแลนักเรียน ที่ได้รับทุนประหนึ่งว่า ท่านคือผู้ปกครองของพวกเรา ผมยังจำได้ว่าระหว่างที่ศึกษาอยู่ที่เยอรมัน ท่านจะให้ผมส่งหนังสือที่เกี่ยวกับวิทยาการสมัยใหม่ให้ท่านเสมอ ๆ ทำให้ผมรู้สึกผูกพัน และศรัทธาในตัวของท่านอย่างจริงใจ เพราะพิสูจน์ได้ถึงว่า ท่านตั้งใจที่จะพัฒนากองทัพอากาศไทยตลอดเวลา

ยิ่งในปี พ.ศ. ๒๕๒๓ ที่ผมเดินทางกลับมา ผมได้มาทำงานที่สำนักงานพัฒนาการสร้างอาวุธ ซึ่งเป็นหน่วยขึ้นตรงของศูนย์วิจัย และพัฒนาระบบอาวุธกองทัพอากาศ ในขณะนั้น ท่านดำรงยศ พล.อ.ท. และเป็นผู้อำนวยการศูนย์ ผมจึงได้มีโอกาสได้รับใช้ท่านอย่างใกล้ชิด ท่านจะสอนและถ่ายทอดวิชาการต่าง ๆ ไม่ใช่เฉพาะกับผมเท่านั้น หากแต่กับนายทหารในหน่วยทุกคน พวกเรารู้สึกได้ถึงความตั้งใจจริงในการทำงานของท่าน และได้รับความรู้อย่างเต็มเปี่ยม ในด้านเทคโนโลยี่ทางวิศวกรรมจากท่าน

จนถึงแม้ว่า ผมจะมาเป็น ทส. ของท่านในปี พ.ศ. ๒๕๒๘ ท่านก็ยังคงที่จะแสวงหาตำราทางด้านวิศวกรรมและคอมพิวเตอร์ ผมได้ติดตามท่านไปซื้อหนังสือเหล่านั้นหลายครั้ง ท่านจะเลือกเองและหากมีเล่มใดที่น่าสนใจเป็นพิเศษ ผมก็มักจะได้รับมอบจากท่านเสมอ ๆ

สำหรับผมแล้ว ช่วงชีวิตหนึ่งของผมที่ได้รับราชการในกองทัพอากาศ นอกจากความผูกพันและศรัทธาในตัวท่านแล้ว ผมได้ถือว่าท่านเป็นครู ผู้มีพระคุณซึ่งผมจะต้องจดจำท่านไปจนตลอดชีวิต จดจำความรู้สึกภูมิใจ ที่ได้ทำงานร่วมกับท่าน ได้รับฟังคำสั่งสอนจากท่าน ทำให้ผมได้รับความรู้มากมาย ผมอยากจะยกย่องท่านว่าคือปราชญ์ และผู้ที่มีบุญคุณต่อกองทัพอากาศไทย

ขออำนาจคุณพระรัตนตรัยจงบันดาลให้ดวงวิญญาณของท่านไปสู่สรวงสวรรค์ คุณงามความดีและความรอบรู้ที่ท่านอาจารย์ได้ทุ่มเทให้กับกองทัพอากาศ และพร่ำสอนลูกศิษย์ทุกคน จะเป็นที่จดจำและจารึก สำหรับนายทหารอากาศทุกคนตลอดไป..

นาวาอากาศเอก อวยชัย แจ้งเร็ว

คำไว้อาลัย คุณพิสุทธิ์

คุณพิสุทธิ์คะ

ปกติคุณพิสุทธิ์มีชื่อเล่นหลายชื่อนัก ตามคำบอกเล่าว่า เด็ก ๆ ชื่อหมี (คุณพ่อเรียก) เพื่อน ๆ เรียก ซะ และต่อมาเมื่อมีอายุมากก็ใช้ชื่อแทนตัวท่านเองว่า ป้อนแทนพ่อ เลยกลายเป็นป้อนตลอดมา

พ่อป้อนจากไปทำให้บ้านเราเงียบเหงามาก เพราะตลอดเวลาที่อยู่บ้านจะมีเพลงจาก TV ตลอดเวลา ทุกคนคิดถึงพ่อป้อน ทำให้ไม่มีใครมีใจที่จะพูดคุยกัน ตั้งแต่เราได้รู้จักกันมา ๔๗ ปีแล้ว รวมทั้งชีวิตที่แต่งงานกัน ๓๐ ปี พ่อป้อนใจดี มีเหตุผล ดิฉันจำได้ว่าพ่อป้อนไม่เคยว่าใครเลย ระเบียบ วินัย ของบ้าน ทำให้ทุกคนอยู่ในความสงบสุข ให้ความเคารพยำเกรงต่อพ่อป้อนเสมอตลอด ท่านไม่ดุใครแม้แต่คนรับใช้ หรือ ทหารรับใช้ คนขับรถฯ

หลังจากแต่งงานแล้ว เราไปใช้ชีวิตที่อเมริกา มณฑลรัฐบอสตัน ๔ ปี และรัฐแมรี่แลนด์ ๒ ปี จนกระทั่งพ่อป้อนจบปริญญาเอก ได้กลับประเทศไทยเมื่อปี ๒๕๑๑ พร้อมด้วยบุตร ชายหญิง ๒ คน พ่อป้อนมีชีวิตอยู่ด้วยความลำบาก แต่มีความมานะอดทน โดยไม่ได้ปริปากพูดถึงเลย โชคดีที่ลูกเป็นเด็กแข็งแรง เลี้ยงง่าย จึงไม่มีปัญหาอะไรเกิดขึ้นสำหรับเด็ก ๖ ปี ในต่างประเทศ

เมื่อกลับมาแล้วพ่อป้อนยังต้องต่อสู้ต่อไปอีกหลายปีนัก จนกระทั่งพ่อป้อน ได้รับพระราชทานยศ เป็น พลอากาศตรี ก็ค่อยยังชั่วขึ้น แต่ถึงกระนั้นเมื่อสูงอายุขึ้น กับการที่ตรากตรำมาตลอด ทำให้สุขภาพเริ่มทรุดลง และเริ่มเข้าอาศัยในความกรุณาของแพทย์ ร.พ.ภูมิพลฯ เป็นประจำ ดวงชีวิตของพ่อป้อนไม่เข้าข้างเลย พอเริ่มจะสบายขึ้น ก็ป่วยเข้าออกโรงพยาบาลเสียทุกปี ชาตินี้พ่อป้อนทำแต่ความดี ดิฉันยังคิดถึงพระคุณอยู่เสมอ ที่ได้ให้ความกรุณาปราณีต่อทุกคนในบ้าน และสำหรับดิฉันโดยได้มาแต่งงานกับพ่อป้อน แต่อะไรหนอที่ทำให้พ่อป้อนต้องมาละจากพวกเราไปในวัยที่เรียกว่า น้อยไป เพียง ๖๕ ปีของท่าน

กุศลผลบุญต่าง ๆ ที่พวกเราแม่ลูก ได้กระทำมาจนบัดนี้ และต่อ ๆ ไปก็ขอให้พ่อป้อนเป็นผู้ได้รับแต่ผู้เดียว ขอให้พ่อป้อนได้ไปสู่สุขคติสมปรารถนาเถิด

ฤดี ฤทธาคนี

ลาไว้อาลัยคุณพิสุทธิ์

คุณพิสุทธิ์กับพี่เป็นญาติเกี่ยวดองกัน โดยคุณพิสุทธิ์เป็นเขยเล็ก ส่วนพี่เป็นสะใภ้ใหญ่ของตระกูลศิริเวช โดยหน้าที่ของคุณพิสุทธิ์มีโอกาสได้ช่วยเหลือประเทศชาติหลายด้าน ทั้งทางด้านเทคโนโลยีใหม่ ๆ และการผลิตทรัพยากรบุคคลหลายสาขา ในด้านส่วนตัวคุณพิสุทธิ์เป็นผู้ที่เปี่ยมไปด้วยเมตตา กรุณา เอื้อเฟื้อเผื่อแผ่ และโอบอ้อมอารีกับทุก ๆ คน เช่น เมื่อรับราชการอยู่ในสหรัฐอเมริกา ได้เอื้อเฟื้อในการจัดพิธีสมรสให้ลูกสาวพี่ที่นั่น ได้อย่างถูกต้องตามขนบธรรมเนียมประเพณีไทยทุกประการ และเมื่อกลับมาแล้วได้จัดบ้านให้ญาติ ๆ และลูกหลานซึ่งส่วนใหญ่อยู่ต่างจังหวัด ได้อาศัยพักพิงมาโดยตลอด แทบจะกล่าวได้ว่าบ้านคุณพิสุทธิ์ เป็นศูนย์รวมของตระกูลเลยทีเดียว กับครอบครัว คุณพิสุทธิ์เป็นหัวหน้าครอบครัวที่ให้ความรักความอบอุ่น และผูกพันกับลูกเมียด้วยดีเสมอมา การจากไปของคุณพิสุทธิ์ จึงนำความเศร้าสลดมาสู่ทุกคนเป็นอย่างยิ่ง ขอกุศลผลบุญ ที่พี่ได้สร้างสมมาชั่วชีวิต โปรดส่งให้ดวงวิญญาณของคุณพิสุทธิ์ ได้เสวยสุขในสัมปรายภพด้วย

ด้วยอาลัย

สุนัย ศิริเวช

สุดอาลัย

เนื่องจากครอบครัวของเราเป็นญาติสนิท แม่รู้สึกอาลัยและตื้นตันจนไม่อาจรำพันอะไรออกมาได้ และแม่กำลังไม่สบายด้วยโรคความดันโลหิตสูงอยู่จึงได้พยายามเล่าเรื่องย่อ ๆ ในสมัยอดีตให้ลูกของแม่เขียนถึงคุณลุงแทน

แม่เล่าว่าคุณลุงพิสุทธ์ คุณลุงทวนทอง (พล.อ.อ.ทวนทอง ยอดอาวุธ) และแม่มีความผูกพันเติบโตด้วยกันมาแต่เล็กเป็นลูกพี่ลูกน้องกัน คุณลุงทวนทองเป็นลูกผู้พี่ (บุตรคุณตาพลตรีหลวงยอดอาวุธ ฟ้อน ฤทธาคนี) และแม่เป็นลูกผู้น้อง (บุตรคุณยายศรีนวล ฤทธาคนี) ทั้งสามคนเกิดปีเดียวกัน แต่แม่เกิดช่วงปลายปีจึงเสมือนเป็นน้องเล็กสุด ในวัยเด็กก็เล่นซุกซนมาด้วยกัน แม่จึงพลอยเล่นอย่างเด็กผู้ชายไปด้วย ความสนุกสนานตามประสาเด็กมีมากจำไม่ได้หมด แม่มักตามคุณลุงทั้งสองไปเที่ยว เช่น ไปจับจิ้งหรีดกันที่ทางรถไฟถนนระนองเมื่อจับจิ้งหรีดได้คุณลุงทั้งสองจะมองหน้ากันแล้วก็ดึงผมหางเปียของแม่ซึ่งยาวออกมาปั่นจิ้งหรีดเล่น เพราะคุณลุงมีผมสั้นแค่เซ็นต์เดียว แต่ครั้งที่จำได้แม่นก็ตอนที่ชวนกันเล่น “ไอ้ปื๊บ” คือเล่นจุดไฟโดยเอาขวดหมึกที่หมดแล้วมาใส่น้ำมัน และใส่ไส้ซึ่งทำจากผ้าขี้ริ้วฉีกเป็นชิ้น ๆ ใส่ลงไปแล้วจุดไฟมันลุกดังปื๊บ ๆ มองเห็นจิ้งหรีดถนัดดี เล่นแล้วเอาขวดกลับมาซ่อนไว้ในโรงรถโดยที่ไส้ยังติดอยู่ ควันขึ้นโขมง แม่ถูกผู้ใหญ่ตีเพราะกลัวไฟจะลุกลามเนื่องจากโรงรถมีน้ำมัน แต่คุณลุงทั้งสองรอดตัวไปได้เพราะแม่เป็นต้นความคิด

เมื่อโตขึ้นในวัยศึกษา คุณลุงยังคงมีความเมตตาต่อแม่มาตลอดเช่นน้องแท้ ๆ โดยยกย่องแนะนำให้เพื่อนฝูงรู้จัก คราวที่บ้านถนนเพชรบุรีถูกขโมยยกเค้าหมดบ้านแม่ไม่มีเสื้อใส่ไปโรงเรียน ขณะนั้นคุณลุงเป็นนักเรียนเตรียมทหารบกและเป็นหัวหน้าตอนอุตส่าห์เจียดเงินเดือนมาซื้อผ้าตัดชุดนักเรียนให้แม่ซึ่งเป็นนักเรียน ร.ร.สตรีวิทยา ใส่ ครั้งต่อมาเมื่อเรียนจบและอยู่ในวัยทำงาน ต่างคนต่างก็มีภารกิจแยกย้ายคนละทาง ทำให้ห่างเหินกันไปบ้างไม่เหมือนครั้งวัยเด็ก คุณลุงทั้งสองรับราชการตำแหน่งสูงในกองทัพอากาศ ส่วนแม่ได้แต่งงานกับพ่อ (ร.อ.อังกูร กาญจนโหติ) ซึ่งเป็นทหารบก สังคมของแม่จึงแยกออกไปจากแวดวงของกองทัพอากาศ อย่างไรก็ตามแม่และคุณลุงก็ยังได้พบกันที่บ้านคุณตา ท่านจอมพลอากาศ ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี ทุกวันปีใหม่ วันเกิดของท่าน และวันสงกรานต์ เป็นประจำทุกปี จนกระทั่งท่านถึงแก่อนิจกรรมไป เมื่อ ๗ ก.ค. ๒๕๓๐ นอกจากนั้นก็พบกันในงานของหมู่ญาติพี่น้องเป็นครั้งคราว ภายหลังเมื่อครบเกษียณอายุ สุขภาพของคุณลุงไม่ค่อยแข็งแรงนัก แม่ก็ติดต่อโทรศัพท์คุยกับคุณป้าฤดีถามทุกข์สุขอยู่เสมอด้วยความห่วงใย โดยเฉพาะเรื่องสุขภาพของคุณลุง

แม่เล่าว่าคุณลุงเป็นผู้มีระเบียบวินัยอย่างเยี่ยมยอด แต่งเครื่องแบบจะเรียบร้อยสะอาดถูกระเบียบตั้งแต่ศีรษะจรดปลายเท้า โดยเฉพาะรองเท้าหนังจะต้องขัดเป็นมันเงาขนาดแมลงวันเกาะไม่ติด สมัยเด็ก ๆ แม่ยังเคยช่วยคุณลุงขัดรองเท้ามาแล้ว เรื่องระเบียบการเรียน การสอนก็เคร่งครัด เพราะท่านเป็นอาจารย์โรงเรียนนายเรืออากาศมาโดยตลอด แม้กระทั่งเมื่อท่านเจ็บป่วยอยู่ในโรงพยาบาล กำลังนอนให้น้ำเกลือและออกซิเจน หลานสาวคือตัวอ้อเอง และหลานเขย (น.ต.สมศักดิ์ จันทร์จรุงภักดิ์) ไปเยี่ยมในช่วงพักกลางวันคุณลุงทราบว่าหลานเขยกำลังศึกษาเป็น นทน.รร.สธ.ทอ. ท่านบอกให้รีบกลับไปเรียนไม่ให้ขาดฟังบรรยาย เสียระเบียบอาจารย์จะตำหนิได้ แต่ถ้าอาจารย์ ตำหนิก็ให้บอกว่ามาเยี่ยมอาจารย์พิสุทธิ์ก็แล้วกัน นี่คือความเคร่งครัดรักษาระเบียบวินัยทุกอย่างที่คุณลุงมี แม้ว่าท่านจะป่วยมากอย่างไร ก็ไม่ยอมให้เสียระเบียบวินัย

เมื่อทราบว่าคุณลุงป่วยหนัก แม่ไม่ได้ไปเยี่ยมที่โรงพยาบาลอีกครั้ง คุณป้าเล่าให้ฟังว่าก่อนคุณลุงจะป่วยครั้งสุดท้าย สุขภาพแข็งแรงดีขึ้นเกือบเป็นปกติ วันหนึ่งได้พูดกับ พ.อ.อ.ละเอียดฯ คนขับรถประจำตัวของท่านว่า "อยากเล่นจับจิ้งหรีดอีก นึกถึงตอนเด็ก ๆ เคยเล่นกับทวนทอง และเพ็ญศรี" แม่ฟังแล้วก็ตื้นตัน เพราะคุณลุงยังระลึกถึงแม่อยู่ แม้ว่าจะเป็นครั้งสุดท้ายก่อนจะจากกันไป

คุณลุงได้ให้ความเมตตาต่อครอบครัวของเรามาโดยตลอด ตั้งแต่สมัยพ่อ-แม่ และต่อมาถึงลูกของแม่ด้วย เมื่อครั้งเป็น ผบ.ศวอ.ทอ.คุณลุงเคยชวนให้หลานของคุณลุงย้ายมาอยู่ที่ ศวอ.ทอ.ด้วยกัน ต่อมาเมื่อย้ายมารับราชการที่ ศวอ.ทอ.หลังจากที่คุณลุงเกษียณอายุราชการแล้ว ท่านก็ยังกรุณาเมตตาฝากผู้บังคับบัญชา และนายทหารผู้ใหญ่ของ ศวอ.ทอ.ให้ด้วย นับเป็นพระคุณที่มิอาจลืมเลือนได้ ครอบครัวของเราขอกราบระลึกถึงพระคุณไว้ ณ ที่นี้ด้วยความเคารพรักและอาลัยเป็นอย่างยิ่ง หากดวงวิญญาณของคุณลุงจะรับรู้ได้ ขอตั้งจิตอธิษฐานกราบดวงวิญญาณของคุณลุงสู่สุขคติในสัมปรายภพด้วยเทอญ

น้องเพ็ญศรี และหลานอ้อ

รำลึกถึงคุณน้าพิสุทธิ์

เล็กและครอบครัวกลับจากฮ่องกงวันอังคารที่ ๑๐ ธ.ค. ๓๔ โดยไม่ทราบว่าคุณน้าพิสุทธิ์ได้เสียชีวิตแล้ว พอทราบข่าวก็ตกใจจนตั้งสติไม่อยู่ มันรวดเร็วเกินกว่าที่จะทำใจได้ ก่อนเดินทางเล็กยังได้โทรศัพท์ไปถามข่าวคราวคุณน้าพิสุทธิ์อยู่เลย คุณน้าฤดีบอกว่าคุณน้าพิสุทธิ์สบายดีไม่ต้องเป็นห่วง แต่อีก ๒-๓ วันจะถึงกำหนดตรวจสุขภาพที่ รพ.ภูมิพล

คุณน้าพิสุทธิ์เสียคืนวันอาทิตย์ที่ ๘ ธ.ค. ๓๔ จำได้ว่าคืนนั้นบริษัททัวร์ที่ฮ่องกงเลี้ยงอาหารค่ำครอบครัวเรา แต่เล็กไม่ได้ไปร่วมในงานเลี้ยงนั้น เนื่องจากมีอาการเวียนศีรษะโดยไม่ทราบสาเหตุ อยากนอนพักผ่อนไม่สามารถฝืนใจไปได้ สามี (อนุพงษ์ กนกนัฏธนา) ก็แปลกใจว่าทำไมเกิดไม่สบายขึ้นกระทันหัน ปกติ เป็นคนแข็งแรงดี เรื่องเจ็บป่วยกระทันหันไม่เคยปรากฏมาก่อน เล็กบอกทุกคนไม่ต้องกังวล ได้นอนพักสักครู่หนึ่งคงจะดีขึ้น เล็กหลับสนิท และฝันว่าเดินทางไปวัดแห่งหนึ่งเห็นสัปเหร่อ ๒ คนกำลังหามศพเดินผ่านหน้าเล็กไป ๒-๓ ก้าว แล้ววางศพลงพร้อมทั้งจัดการทำความสะอาดศพ เล็กชะโงกไปดู เอ๊ะ ทำไมศพเหมือนคุณน้าพิสุทธิ์อ้าปากจะเรียกแต่ก็ไม่มีเสียงออกมา สะดุ้งตื่นขึ้นเห็นยังมืดอยู่นาฬิกาเพิ่งตี ๓ เท่านั้นเอง เล็กนอนไม่หลับจนสว่าง ได้เล่าให้อนุพงศ์ และน้องสาวฟัง คุณอนุพงศ์ปลอบว่าไม่มีอะไรร้ายแรงหรอก เป็นเพราะไม่สบาย เลยฝันร้ายนั่นเอง แต่ก็ยังไม่สบายใจอยู่ดี อยากกลับเมืองไทยเร็ว ๆ คิดในใจว่ามาเที่ยวครั้งนี้ไม่สนุกเลย เห็นของที่อยากซื้อก็ไม่ซื้อ เพื่อนชวนไปไหนก็ไม่อยากไป มีอาการซึมเศร้าจนลูกแพ็ตสังเกตเห็นถามว่า คุณแม่ไม่สนุกหรือคะ ทำไมชอบทำหน้าเศร้า ๆ ตัวเองเป็นคนที่มีลางสังหรณ์มาตลอด ลางสังหรณ์คราวนี้จะเกิดอะไรขึ้นอีกก็ไม่ทราบ

ในที่สุดทุกคนก็ได้ประจักษ์แล้วว่า ความฝันคืนนั้นเป็นความจริง ซึ่งก็หมายความว่าคืนนั้นคุณน้าพิสุทธิ์ได้ไปบอกหลานใช่ไหมคะ

ในฐานะที่เล็กเป็นพี่คนโตของน้อง ๆ อีก ๔ คน มีความรู้สึกเสียใจอย่างสุดซึ้งที่คุณน้าพิสุทธิ์ต้องจากไป คุณน้ามีพระคุณต่อเล็กและน้อง ๆ มากเหลือเกิน ท่านรักและเมตตาเหมือนลูกแท้ ๆ จะแทนตัวเองว่าพ่อ เรียกพวกเราว่าลูกทุกครั้ง พวกเราเป็นหลานที่ใกล้ชิดคุณน้าพิสุทธิ์และคุณน้าฤดีมากที่สุด เนื่องจากคุณน้าฤดีเป็นผู้เลี้ยงดู อบรม สั่งสอนพวกเราตั้งแต่เล็ก ๆ เพราะคุณพ่อ (บุญนำ พรกิจประสาน) และคุณแม่ (ลักษณี ศิริเวช) มีธุรกิจรัดตัว เมื่อคุณแม่เสียชีวิต คุณพ่อธุรกิจอยู่ต่างจังหวัด พวกเรามาเรียนที่กรุงเทพฯ โดยพักกับญาติ ๆ เมื่อคุณน้าพิสุทธิ์ และคุณน้าฤดีกลับจากอเมริกาก็รับพวกเรามาอยู่รวมกันเหมือนเดิม ที่บ้านพัก ทอ.ช่องทางดินแดง ดอนเมือง น้อง ๆ บางคนก็อยู่หอพักของมหาวิทยาลัย ซึ่งไม่น่าเป็นห่วง คุณน้าพิสุทธิ์เคยพูดบ่อย ๆ ว่า ถ้าคุณพ่อ-คุณแม่ของลูกหลานจะซื้อบ้านในกรุงเทพฯให้อยู่ตามลำพังละก็ไม่เห็นด้วย เพราะอิสระเกินไป หอพักทั่วไปที่ไม่ใช่ของมหาวิทยาลัยก็ไม่สมควรพัก ท่านพูดว่า "พ่ออาจจะหัวโบราณเกินไปก็ได้"

คุณน้าพิสุทธิ์เป็นห่วงหลาน ๆ ตลอดเวลา เมื่อเล็กเรียนจบคุณน้าพิสุทธิ์พาไปสมัครงานที่ U.S. AIRFORCE ทำอยู่ประมาณ ๒ ปีก่อนที่จะมาทำงานที่ธนาคารกรุงเทพ จำกัด หลานทุกคนต้องกลับบ้านตรงเวลา หากใครจะไปไหน นอกเหนือจากไปทำงานหรือไปโรงเรียนแล้วต้องขออนุญาตล่วงหน้า ๒ วัน ถ้าเห็นว่าไม่สมควรก็ไม่ได้รับอนุญาต บางครั้งเพื่อน ๆ มาขออนุญาตด้วยตนเองยังถูกปฏิเสธไปบ่อยครั้ง แต่เล็กไม่เคยรู้สึกอึดอัด กลับมีความรู้สึกอบอุ่นใจ และรักบ้านมาก

ระหว่างรับประทานอาหารเย็น คุณน้าพิสุทธิ์จะพูดว่า "วันนี้ลูก ๆ มีอะไรจะเล่าให้พ่อฟังบ้างคะ?" หลาน ๆ ก็ต้องรายงานเหตุการณ์ในแต่ละวันให้คุณน้าพิสุทธิ์ทราบ ใครมีปัญหาอะไรคุณน้าจะหาทางแก้ไข

ให้ ทุกคนในบ้านมีความรักและความผูกพันกันเป็นอย่างมาก แม้หลาน ๆ ต่างมีครอบครัวและแยกย้ายไปก็จะติดต่อกันเป็นประจำเหมือนเดิม คุณน้าจะดีใจที่เห็นหลาน ๆ มีความสุขในครอบครัว เคยบอกเล็กว่าภูมิใจที่เห็นหลานเขยทุกคนไม่ดื่มเหล้า ไม่สูบบุหรี่ ถ้าหลงไหลไปแล้ว กว่าจะถอนตัวกลับได้มันก็สายไปเสียแล้ว

คุณน้าพิสุทธิ์เป็นที่รักและนับถือของครอบครัวศิริเวช เป็นอย่างยิ่ง คุณน้าพิสุทธิ์เป็นบุคคลที่เพียบพร้อมด้วยคุณธรรมเป็นคนโอบอ้อมอารี เจรจาอ่อนหวาน หน้าตายิ้มแย้มแจ่มใสต่อทุกคนที่ได้พบเห็นช่วยเหลือคนที่มีปัญหาเท่าที่จะทำได้ตามความสามารถไม่ถือตัว จริงใจต่อมิตรสหาย และผู้ใกล้ชิดเสมอต้นเสมอปลายทั้งต่อหน้าและลับหลัง ในขณะเดียวกันคุณน้าพิสุทธิ์ก็รังเกียจการคอรัปชั่น เมื่อครั้งที่คุณน้าพิสุทธิ์ได้ดำรงตำแหน่งเป็นผู้อำนวยการกองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศ เล็กเห็นพ่อค้านำของกำนัลมาให้ที่บ้านหลายครั้ง คุณน้าพิสุทธิ์จะคืนกลับไปทุกครั้ง คุณน้าพร่ำสอนลูก, หลานให้มีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง และผู้อื่น ให้เทิดทูนสถาบันชาติ ศาสนา พระมหากษัตริย์ เวลาได้ยินเพลงชาติ คุณน้าจะยืนตรงทุกครั้ง แม้ขณะที่สมาชิกในบ้านนั่งดูทีวีกัน พอเพลงชาติขึ้น ท่านจะพูดก่อนว่า เพลงชาติขึ้นแล้วค่ะ ทุกคนก็ยืนตรงกันหมด

หลาน ๆ ยังไม่ได้ทดแทนพระคุณคุณน้าพิสุทธิ์เลย แต่ช่วงที่คุณน้าป่วย คุณน้าฤดีหลาน ๆ น้องโอและน้องฟ้าฟื้นจะทำบุญให้ตลอดปีอยู่เสมอ คุณน้าหลับให้สบายเถิดค่ะ ไม่ต้องห่วงอะไรอีกแล้ว เพราะคุณน้ามีบุตรสาวและบุตรชายที่น่ารักทั้ง ๔ คน มีหน้าที่การงานที่มีเกียรติ มีอนาคตที่รุ่งโรจน์อย่างแน่นอน

หลาน ๆ เชื่อว่า คุณน้าพิสุทธิ์จะต้องเป็นสุขแล้ว คุณน้าผู้ประกอบกรรมดีมาตลอดชีวิต ขอให้บุญกุศลที่คุณน้าพิสุทธิ์ได้ทำมาตลอด จงส่งวิญญาณของคุณน้าไปสู่สุคติสัมปรายภพเทอญ หากชาติหน้ามีจริงขอภาวนาให้พวกเราได้เกิดมาเป็นน้าหลานกันอีก และทุกชาติไป

จากหลานและเหลน

หลาน	**เหลน**
สุนันทา (เล็ก) - อนุพงศ์ กนกนัฏธนา	**พัดชา, ณิชยา กนกนัฏธนา**
สุภาพรรณ (นิด) พรกิจประสาน	
สุวรรณา (หนุ่ย) - วิศาล จูฑะกาญจน์	**ธีรภัทร, ภัททิยา, ศุจีนันท์ จูฑากาญจน์**
สุพัตรา (จิ๋ว) - ปราโมทย์ ครองยุทธ	**อลิสรา - ชุติมา ครองยุทธ**
สุปรีดี์ (ตี๋) พรกิจประสาน	

ไว้อาลัย
แด่
พ่อของลูก ๆ

ในอดีตยามที่เรา-ลูก ๆ ของท่านฯ ยังเป็นเด็กนั้น เรามีสิ่งที่ยึดมั่นและเป็นรูปแบบ เป็นบุคคลที่คอยสอดส่องดูแลเราตลอดเวลา คือ ท่าน-พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี นายทหารนักวิชาการ ผู้ซึ่งเป็นเสมือนผู้ยิ่งใหญ่ที่สุดในสายตาของพวกเรา

ในการระลึกถึงวันที่ผ่านไปของครอบครัวเราที่มีพ่อเป็นหัวหน้าครอบครัว พ่อป๋อนเป็นชื่อเรียกที่เราเรียกขานท่าน ซึ่งเป็นชื่อที่มีความหมายของเรายิ่งนัก มักจะเป็นคำพูดที่ติดปากเรามากที่สุดเมื่อยามเราอยู่บ้าน พ่อป๋อนเป็นผู้ที่สั่งสอนและอบรมให้แก่ลูก ๆ ทุกคนให้ประพฤติปฏิบัติในสิ่งที่ถูกต้องเหมาะสม การดูแลและเอาใจใส่อย่างสม่ำเสมอตลอดเวลาของพ่อป๋อนที่มีต่อลูก ๆ ยังเป็นความทรงจำที่ลูก ๆ ทราบและประทับใจเป็นอย่างยิ่ง ตลอดเวลาที่เราอยู่กันแบบ พ่อ-ลูก ความเคารพยำเกรงจากลูก ๆ ที่มีต่อพ่อป๋อนเป็นสิ่งที่ควบคุมความประพฤติของเหล่าลูก ๆ ความเอื้ออารี การให้ และความเอาใจใส่ เป็นเสมือนกำลังใจและความอบอุ่นต่อพวกเรา เราถูกสั่งสอนจากท่านให้รู้จักอดทน และมีระเบียบวินัย ซึ่งเป็นสิ่งที่มีประโยชน์มากในการดำเนินชีวิตในปัจจุบัน สิ่งต่าง ๆ มากมายที่ท่านสั่งสอนให้ยึดถือปฏิบัติเป็นสิ่งที่ถูกต้อง ซึ่งในการสั่งสอนท่านไม่จำเป็นต้องว่ากล่าวแรง ๆ เลย ความสำนึกผิดเมื่อกระทำผิดจะเกิดขึ้นเมื่อพ่อป๋อนมองหน้าเท่านั้น ซึ่งอาจจะเป็นเพราะความเคารพในตัวท่าน ความเป็นกันเองระหว่างพ่อ-ลูกนั้นเป็นสิ่งที่เราทุก ๆ คนรู้สึกมีความสุขที่ได้รับ พ่อป๋อนเป็นคำง่าย ๆ แต่มีความหมายมากมายในตัวมันเอง พ่อป๋อนจะกระตือรือร้นในการยิ้มให้กับลูก ๆ และสนอกสนใจในสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเราเสมอ ทำให้ไม่เคยมีความเครียดหรือความกลัวใด ๆ ต่อพ่อป๋อน

จากคำบอกเล่าของเพื่อนของพ่อป๋อน พ่อป๋อนเป็นคนขยันเรียน สนุกสนานเสมอ มีระเบียบวินัยมาก เพื่อน ๆ จึงรักและมีความสนิทสนมกับพ่อป๋อนมาก พ่อป๋อนเคยเล่าเรื่องสมัยเด็ก ๆ ว่าทุก ๆ วันจะต้องอ่านหนังสือก่อนได้รับอนุญาตให้ออกไปเล่นลูกข่างหรือลูกหิน ซึ่งเป็นของเล่นยอดนิยมของเด็กสมัยนั้น พ่อป๋อนชอบเล่นกีฬาของเด็กผู้ชายทุกชนิด การตกกุ้ง ตกปลา โดยได้เล่าถึงอดีตอันสนุกสนานในสมัยเก่า ๆ ให้ฟังเสมอ บ่อยครั้งในการเล่านั้นมักจะเป็นการเปรียบเทียบง่าย ๆ ให้ฟัง เช่นการเป็นนักสู้ไม่ถอยของปลากัด การที่จิ้งหรีดจะถอยหลังตั้งรับสู้ในรูของมันเสมอ ท่านชอบของเล่นเชิงวิทยาศาสตร์โดยทำของเล่นเอง เช่นนำวัสดุที่ไม่ใช้แล้ว ซี่ล้อจักรยาน, ส่วนประกอบอื่นที่เป็นโลหะมาทำเป็นเรือดำน้ำ ซึ่งก็จะได้เรือดำน้ำที่สมบูรณ์ ท่านต้องทดลองหลาย ๆ ครั้ง ด้วยความอดทนและช่างสังเกต

เมื่อพ่อป๋อนรับราชการสอนที่โรงเรียนนายเรืออากาศ ซึ่งเป็นสถานที่ ๆ พ่อป๋อนทุ่มเทให้มาก ชีวิตทำงานส่วนมากแล้วจะปฏิบัติหน้าที่เป็นอาจารย์ในสถาบันนี้ ท่านเริ่มงานสอนด้วยตนเอง ซึ่งเป็นที่เลื่องชื่อในเรื่องความเข้มข้นทางวิชาการ ตื่นแต่เช้า สอนจนเย็น พ่อป๋อนถือว่านายทหารที่จะจบจากโรงเรียนฯ แห่งนี้นอกจากจะเป็นวิชาทหารแล้วจำเป็นจะต้องมีวิชาการที่แกร่งด้วย พ่อป๋อนจะเคี่ยวเข็ญให้ทุกคนตั้งใจเรียน ถ้าคนไหนเรียนไม่ทันหรือสงสัยท่านจะกระตือรือร้นที่จะอธิบายจนกว่าจะเข้าใจไม่ว่าจะใช้เวลานานเท่าไร ผลแห่งความพยายามนี้ทำให้พ่อป๋อนได้รับชื่อว่าเป็น "ปรมาจารย์แห่งสถาบันโรงเรียนนายเรืออากาศ" ทีเดียว

ความที่ต้องการให้โรงเรียนนายเรืออากาศมีความสามารถทัดเทียมกับสถาบันอื่น ๆ ได้ พ่อป๋อนก็จะทุ่มเทให้มาก จนมีคำเล่าขานต่อ ๆ กันมาว่า พ่อป๋อนเป็นคนที่ไม่ปล่อยให้เวลาสอนหมดโดยง่ายโดย

เขียนกระดานดำด้วยมือขวาแต่ลบกระดานทันทีด้วยมือซ้าย การปาชอล์กหรือแปรงลบกระดานเมื่อนักเรียนหลับในห้องเรียน ฯลฯ

การรับราชการที่กองทัพอากาศของพ่อป๋อนตลอดชั่วชีวิตของท่าน ทำให้นิสัยและความประพฤติของพ่อป๋อนมีลักษณะของทหาร ความตรงเวลาของพ่อป๋อนทำให้เราลูก ๆ อึดอัดมากในช่วงเวลาที่เรายังเป็นเด็ก เพราะถ้าเราไม่ตรงเวลาหรือมาตามนัดกับพ่อป๋อนล่าช้าแล้วจะพบกับปฏิกริยาตอบโต้ที่ทำให้เราต้องพลอยรีบร้อนไปด้วย ถ้าพ่อป๋อนบอกว่าจะออกจากบ้าน ๖ โมงตรงหมายถึงว่าพ่อป๋อนจะออกมายืนรอที่โรงรถ ๕ โมง ๔๕ นาทีแล้ว เมื่อถึงเวลานอนของเด็ก ๆ คือเวลา ๒ ทุ่ม ทุกคนจะต้องวิ่งขึ้นนอนก่อนนาฬิกาตีครบ ๘ ครั้ง ซึ่งเมื่อลูก ๆ โตขึ้นแล้วพบว่าเป็นการสั่งสอนที่ถูกต้องและควรที่จะเชื่อฟัง

ลักษณะความเป็นทหารของพ่อป๋อนที่คอยสั่งสอนลูก ๆ ให้อดทนและเคารพต่อบุคคลที่อยู่รอบข้าง บ่อยครั้งเมื่อเวลาทานอาหารพร้อม ๆ กันพ่อป๋อนจะคอยเอามือดันหลังเมื่อเรานั่งตัวค่อมและบอกแก่เราว่าอย่านั่งเป็นกุ้งไม่สง่าเลย พ่อป๋อนบอกให้เรานอบน้อมถ่อมตนเสมอให้สามารถเข้ากับคนได้ทุกคน กระตือรือร้นในการทำงาน ไม่ปล่อยวางงานที่ค้างจนทำไม่ทัน ท่านบอกแก่ทุก ๆ คนเสมอว่า “ทันที” ซึ่งเป็นคำขวัญของพ่อยามที่ทำงานให้ลุล่วง

การสืบทอดรับราชการทหารอากาศเป็นสิ่งที่พ่อป๋อนภูมิใจและระลึกเสมอในการทดแทนพระคุณท่าน พ่อป๋อนไม่เคยผิดหวังเลยในงานชีวิตราชการของท่าน พ่อป๋อนบอกเพียงแต่ว่าทำหน้าที่ของเราให้ดีที่สุดตามที่ได้รับมอบหมาย การเป็นทหารรับราชการเรามีวินัยที่จะต้องปฏิบัติหน้าที่ของเราให้ลุล่วงโดยไม่หวังสิ่งตอบแทน เคยมีคนถามว่าทำไมท่านถึงทำงานหนักอยู่ในฐานะของข้าราชการทหารอยู่อย่างนี้ทั้ง ๆ ที่พ่อป๋อนก็ศึกษามาจนถึงขั้นปริญญาเอก และยังสามารถจบในสถาบันที่มีชื่อเสียงในอเมริกา ซึ่งถ้าทำงานส่วนตัวหรือธุรกิจแล้วจะสามารถไปได้ไกลและรุ่งเรืองแน่ ๆ และเนื่องจากความสามารถของท่านก็เป็นที่ยอมรับกันทั่ว เราก็เลยนำคำถามนี้ไปถามพ่อป๋อน ท่านยิ้มและตอบอย่างภูมิใจในการทำงานเพื่อกองทัพอากาศและงานที่ท่านรัก ซึ่งเป็นการผลักดันสิ่งต่าง ๆ ที่จำเป็นที่จะต้องมีบุคลากรมาช่วยเหลือ ไม่ว่าจะเป็นโรงเรียนนายเรืออากาศ หรือศูนย์วิจัยระบบและคำนวณ (ศวอ.ทอ.) ทำให้เราเข้าใจในการเสียสละครั้งนี้พ่อป๋อนเป็นผู้มากกว่าให้อาจจะเรียกว่า “ป๋อน” เลยก็ได้ จากผลงานเหล่านี้นับเป็นเกียรติและความภูมิใจของพ่อป๋อนที่มีอยู่ในใจตลอดมา

งานอดิเรกของพ่อป๋อนเป็นการอ่านหนังสือตำรา พ่อป๋อนจะมีความสุขมากเวลาได้หนังสือวิชาการเล่มใหม่ ๆ ยามเด็กท่านจะขี่จักรยานไปร้านโอเดียนสโตร์หรือสยามสแควร์เพื่อไปอ่านหนังสือบ่อย ๆ จนเจ้าของร้านจำได้และยินยอมให้ซื้อแบบผ่อนได้ด้วย เมื่อมีตำราเล่มใหม่ ๆ เขาก็จะรีบเสนอขายทันที ข้าพเจ้าสมัยเด็ก ๆ ก็จะชอบดูตามแผงหนังสือขายการ์ตูน ในขณะที่พ่อก็จะดูหนังสือตำรา เข้าร้านโน้นร้านนี้ไปเรื่อย ๆ ทักทายกับเจ้าของร้านเพราะคุ้นเคยกันโดยเป็นลูกค้าที่แสนดีตลอดมา เมื่อเวลาเดินทางไปต่างประเทศสิ่งที่แน่นอนในการเดินทางทุก ๆ ครั้งคือจะมีการหอบหนังสือข้ามน้ำข้ามทะเลเป็นจำนวนมาก ๆ โดยกระเป๋าเดินทางจะโป่งพองทุก ๆ ใบ กระทั่งแม้ลูกศิษย์ของคุณพ่อที่เดินทางไปศึกษาต่างประเทศ เมื่อถึงกำหนดกลับเมืองไทยก็มักจะมีจดหมายมาหาคุณพ่อ และสอบถามถึงตำราที่ชื่นชอบหรือตำราที่ต้องการโดยมักจะนำกลับมาฝากเสมอ ๆ โดยอาจจะเป็นที่ทราบกันทั่ว การสะสมหนังสือตำราเริ่มมีที่เก็บไว้ตั้งแต่สมัยเรียนโรงเรียนเท็คนิคทหารบก เก่าโบราณมาก ๆ สมุดจดงานก็จะมีเก็บไว้มาก ๆ สมัยตั้งแต่หน้าปกสมุดจดงานมีรูปภาพประกอบเป็นช่อง ๆ สนับสนุนให้รักชาติ ตำราบางเล่มเก่ามากการเปิดอ่านจะต้องระวังอย่างมาก เพราะกระดาษแต่ละหน้าพร้อมจะแยกขาดออกจากกันโดยง่ายดาย พ่อป๋อนมีศัตรูที่คุณพ่อเกลียดน้ำหน้ามาก คือตัวแมลงสามง่ามกินหนังสือ ซึ่งปกติแล้วตลอดชีวิตของพ่อป๋อนไม่เคยมีศัตรูเลย แมลงนี้เป็นศัตรูตลอดชีวิตของพ่อป๋อน ทุกครั้งที่พ่อเห็นก็จะโวยออกมาดัง ๆ ให้ช่วยกันจับแมลงนี้ ดังนั้นจึงถือเป็นศัตรูตัวฉกาจอย่างเดียวของพ่อในชั่วชีวิต

งานสะสมหนังสือตำราทางวิชาการที่สะสมมานานเป็นจำนวนหนังสือตำราประมาณ ๘,๐๐๐ เล่ม โดยสะสมเก็บที่บ้านทั้งชั้นบนชั้นล่าง ทุก ๆ ที่ที่สามารถเก็บตำราได้ ซึ่งเป็นผลงานการสะสมตั้งแต่สมัยเรียนที่โรงเรียนเท็คนิคทหารบก งานอ่านหนังสือจึงเป็นงานอดิเรกที่พ่อป๋อนทำทุก ๆ วัน ตื่นเช้าก็จะเข้าห้องสมุดส่วนตัว จัดหนังสือ อ่านหนังสือจนเย็นและเข้านอนถ้าวันนั้นไม่ติดธุระอื่น ๆ พ่อป๋อนเริ่มซื้อหนังสือตั้งแต่เด็ก ๆ ช่วงที่เรียนที่สหรัฐอเมริกาครอบครัวของเราประหยัดเงินกันเพื่อจะได้มีเงินมาซื้อตำราได้ เมื่อเดินทางกลับบ้านเมืองไทย ลังหนังสือถูกส่งตามมาเป็นจำนวนหลาย ๆ ลังเป็นสัดส่วนมากที่สุด ทำให้ที่บ้านต้องมีชั้นหนังสือเตรียมรับตำรามากมายเหล่านี้ เมื่อครั้งย้ายบ้านสิ่งแรกที่พ่อป๋านต้องการเมื่อปลูกบ้านหรือย้ายบ้านคือห้องสมุดดี ๆ สักห้อง เพื่อจะได้สามารถเก็บตำราที่ท่านรักอย่างดี

พ่อป๋อนอ่านหนังสือทุกเล่มที่ซื้อมา ซึ่งเป็นเรื่องที่น่าประหลาดใจมากถึงการอ่านเร็วของพ่อป๋อน นอกจากภาษาอังกฤษแล้ว ยังมีตำราภาษาเยอรมัน ภาษาเยอรมัน และในบางเล่มก็เป็นภาษาจีนด้วย ที่พ่อป๋อนอ่านพ่อป๋อนบอกว่า ภาษาอื่น ๆ นั้นอ่านไม่ออกทุกตัวหรอก แต่เนื่องจากเป็นตำราทางวิชาการ สมการและสูตรทางคณิตศาสตร์จะเป็นภาษาสากล จึงสามารถเข้าใจถึงเนื้อหาได้ ในจำนวนตำราถูกแบ่งออกเป็นหมวดหมู่มากมายหลายแขนง ซึ่งรวมทั้งตำราทางการแพทย์ ทางเศรษฐศาสตร์ ทางบัญชี ฯลฯ โดยตำราบางเล่มเป็นหนังสือที่หายากมากไม่สามารถหาได้อีก หนังสือทั้งหมดถูกเรียงเป็นหมวดหมู่ง่ายต่อการหา พ่อป๋อนจำตำแหน่งของหนังสือได้ทุกเล่ม โดยลูก ๆ จะทราบกันว่าหนังสือเหล่านี้ไม่ควรไปเล่น เพราะท่านรักถนอมตำราของท่านมากโดยถือเป็นของสูง บางครั้งมีลูกศิษย์มาหาพร้อมกับโจทย์ปัญหาทางวิชาการยาก ๆ และขอให้พ่อป๋อนช่วยเหลือ พ่อป๋อนสามารถเปิดตำราหาตัวอย่างเปรียบเทียบเพื่อแก้ไขปัญหาทันที

ศูนย์วิจัยระบบและคำนวณกองทัพอากาศ หรือที่เรียกว่าสำนักงานวิจัยระบบและคำนวณศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธ กองทัพอากาศ เป็นผลงานหนึ่งที่พ่อป๋อนภูมิใจมากหลังจากการผลักดันสร้างศูนย์คอมพิวเตอร์ แห่งกองทัพอากาศขึ้นมาได้จนสำเร็จ พ่อป๋อนกับงานทางด้านวิทยาศาสตร์ประยุกต์เป็นความถนัดถนี่อย่างมากของพ่อป๋อน ซึ่งท่านพยายามถ่ายทอดความสามารถหรือนำความสามารถมาเป็นประโยชน์ในการพัฒนางานระบบคำนวณต่าง ๆ ภายในกองทัพอากาศฯ โดยนำคอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่มาใช้ในกองทัพ เริ่มแรกศูนย์คอมพิวเตอร์ตั้งอยู่ริมถนนวิภาวดีใกล้กับท่าอากาศยาน ที่เรียกกันตึกเหลืองอยู่ตรงข้ามกับสถานีรถไฟดอนเมือง ซึ่งพ่อป๋อนจะเดินทางไปทำงานทุกวัน แม้แต่วันเสาร์-อาทิตย์ของบางอาทิตย์ก็จะไปที่ศูนย์คอมพิวเตอร์ฯ ด้วยความเป็นห่วงซึ่งพ่อป๋อนคงจะมีความรู้สึกผูกพันเสมือนเป็นสมบัติส่วนตัวที่จะต้องดูแล ปัจจุบันศูนย์ฯดังกล่าวก็ย้ายมาใกล้กับอาคาร ๘ แฉก กองบัญชาการกองทัพอากาศ ซึ่งท่านก็ยังเดินทางไปเสมอ ๆ จนกระทั่งมาเสียชีวิตลง พ่อป๋อนพูดเสมอ ๆ ว่าข้าราชการที่ทำงานที่นี้ต้องทำงานหนักเพื่อก่อตั้งสถานที่แห่งนี้ให้มีประสิทธิภาพสูงอยู่เสมอ ดังนั้นบ่อยครั้งที่พ่อป๋อนจะต้องมาดูแลถึงแม้จะเป็นช่วงเวลาพักผ่อนของพ่อป๋อนเพราะคนของพ่อป๋อนยังทำงานอยู่

ระยะหลังพ่อป๋อนมีอาการเจ็บไข้บ่อยขึ้น อาจเป็นสาเหตุหลาย ๆ อย่าง การเข้า-ออกโรงพยาบาลภูมิพลฯบ่อย ๆ ทำให้ลูก ๆ ใจไม่ค่อยดี แต่เราเชื่อมั่นว่าพ่อของเราจะอายุยืน เป็นพ่อที่น่ารัก เป็นคนที่คอยห่วงใยเราตลอดเวลา ปกติพ่อป๋อนเป็นคนที่แข็งแรงอดทนแม้ร่างกายจะมีขนาดกระทัดรัดแต่ก็คล่องแคล่วชีวิตประจำวันทุก ๆ วันพ่อป๋อนจะตื่นแต่เช้าโดยไม่ต้องใช้นาฬิกาปลุก สมัยก่อนพ่อป๋อนต้องตื่นตี ๔ ครึ่งเพื่อส่งลูก ๆ ขึ้นรถสวัสดิการทหารแล้วจะไปทำงานต่อ การออกกำลังกายของท่านจะเป็นการเดินรอบ ๆ บ้านเท่านั้น โดยใช้เวลากับตำราในบ้านได้มากขึ้น

ทุก ๆ ครั้งในโรงพยาบาลฯจะมีเพื่อน ๆ ลูกศิษย์มาเยี่ยมไข้เสมอ ๆ แสดงความเป็นห่วง พ่อป๋อนก็จะบอกว่าสบายมากทุกครั้ง แต่เราก็เป็นห่วงที่ท่านมาโรงพยาบาลบ่อยเกินไป พ่อป๋อนมีโรคที่เกี่ยวกับความดันและเกี่ยวกับระบบภายในร่างกายเช่น ตับ ไต เราเคยเตือนท่านเสมอ ๆ แต่พ่อป๋อนก็อธิบายเป็น

หลักวิชาการยาวเหยียดซึ่งเราก็ไม่ทราบความจริงด้วยความที่สู้ความรู้พ่อป้อนไม่ได้ เราทุกคนพยายามบอกท่านเสมอ และทุก ๆ คนก็ไม่เคยคาดคิดว่าพ่อป้อนเมื่อตอนอายุมากแล้วจะทรมานร่างกายในเรื่องบางเรื่อง แต่พ่อป้อนก็บอกกับลูก ๆ เสมอว่าท่านไม่เคยทำให้ใครเดือดร้อน พ่อป้อนทำหน้าที่ทุก ๆ อย่างแล้วครบถ้วน พ่อป้อนพูดทำให้เราสงสารและเห็นใจทุกครั้ง และทำให้เราคิดว่าท่านคงจะมีเหตุผลส่วนตัว เพราะปกติแล้วเนื่องจากเป็นนักวิชาการที่จะต้องมีเหตุผลเสมอ

ท้ายสุดนี้ เราลูก ๆ ของพ่อป้อนต่างระลึกเป็นใจเดียวกันว่าเราได้สูญเสียพ่อที่แสนน่ารักของลูก ๆ ซึ่งทุกอย่างนี้เกิดขึ้นแล้วสักวันก็จะต้องเสียชีวิตลง แต่พ่อของเรายังคงอยู่ในใจเราเสมอ

นางดวงสมร มารุ่งโรจน์
น.ต.หญิง ศุลีวรรณ รัตนไชย
น.ส.สุทธาวดี ฤทธาคนี
ร.อ.ฟ้าฟื้น ฤทธาคนี

การตั้งชื่ออาคาร "พล.อ.อ.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี" เพื่อเป็นเกียรติแก่ท่าน

ใน โรงเรียนนายเรืออากาศ

ที่ กห ๐๖๐๒๑.๒/๔๔๖๑

กรมสารบรรณทหารอากาศ
ดอนเมือง กทม. ๑๐๒๑๐

๒๕ ธันวาคม ๒๕๓๔

เรื่อง ขอใช้ชื่ออาคารเรียนใหม่ว่า "อาคารพิสุทธิ์ ฤทธาคนี"

เรียน คุณฤดี ฤทธาคนี

ด้วยกองทัพอากาศ ได้จัดสร้างอาคารเรียนใหม่ โรงเรียนนายเรืออากาศ เป็นอาคาร ๓ ชั้น ค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างทั้งสิ้น ๑๗,๐๙๐,๐๐๐.๐๐ บาท (สิบเจ็ดล้านเก้าหมื่นบาทถ้วน) ปัจจุบันได้เปิดใช้ในการจัดการเรียนการสอน สำหรับนักเรียนนายเรืออากาศโดยเฉพาะ

โรงเรียนนายเรืออากาศได้พิจารณาแล้วว่า พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี อดีตศาสตราจารย์และผู้อำนวยการกองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศ เป็นผู้อุทิศตนและทุ่มเทในการปฏิบัติหน้าที่ราชการ การวางรากฐานหลักสูตร การทำการสอน ตลอดจนการให้คำปรึกษา แนะนำ และสนับสนุนด้านการศึกษาตลอดมา จนทำให้โรงเรียนนายเรืออากาศมีชื่อเสียงและมาตรฐานเทียบเท่าสถาบันระดับอุดมศึกษาภายในและภายนอกประเทศ

เพื่อเป็นอนุสรณ์ในคุณงามความดี และเป็นเกียรติแก่วงศ์ตระกูลของ พลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี โรงเรียนนายเรืออากาศ จึงเห็นสมควรตั้งชื่ออาคารดังกล่าวว่า "อาคารพิสุทธิ์ ฤทธาคนี"

จึงเรียนมาเพื่อกรุณาพิจารณา หากเห็นสมควรประการใด ขอได้แจ้งให้กรมสารบรรณทหารอากาศทราบต่อไปด้วย

ขอแสดงความนับถือ

พลอากาศตรี สมพันธ์ สิริหงส์

(สมพันธ์ สิริหงส์)

เจ้ากรมสารบรรณทหารอากาศ

กองเสมียนตรา
โทร. ๕๓๔-๑๕๗๑

ชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า

โดย

จอมพลอากาศ ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี

คำนำ
"ชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า"

เรื่องเดิม - เนื่องในวันที่ ๒๗ มีนาคม ๒๕๐๗ (๑៩๖๔) กองทัพอากาศจะมีอายุครบ ๕๐ ปีเต็ม

ดังนั้น เมื่อ ๒๗ มกราคม ๒๕๐๗ (๑៩๖๔) นาวาอากาศโท ประเสริฐ สัชฌุกร บรรณาธิการหนังสือข่าวทหารอากาศ ปัจจุบัน นาวาอากาศเอก ได้นำหนังสือของพลอากาศโท ประสงค์ คุณะดิลก ปัจจุบัน พลอากาศเอก ประธานกรรมการจัดทำหนังสือที่ระลึกครบรอบ ๕๐ ปี ของกองทัพอากาศ เรื่อง ขอให้ข้าพเจ้าเขียนเรื่องราวเกี่ยวกับกองทัพอากาศในอดีต จะเป็นเรื่องของบุคคลก็ดี สถานที่ก็ดี หรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในสมัยนั้นก็ดี ที่ผู้อ่านได้อ่านแล้วเกิดความรู้สึกซาบซึ้งและประทับใจในความเป็นมาของกองทัพอากาศ ซึ่งนับวันจักหาผู้ใดทรงจำหรือรู้จริงได้ยาก หนังสือนี้จะเป็นเสมือนเครื่องบันทึกเรื่องราวเหล่านั้นไว้ เพื่อเป็นเครื่องเตือนความทรงจำ ของอนุชนสืบต่อไป

ข้าพเจ้าได้สนองความประสงค์ของคณะกรรมการด้วยความยินดี จึงได้วางแนวความคิด เป็นโครงการในการเขียนไว้ว่า จะแต่งให้เป็นเรื่องของสามสมัยรวมสามเรื่อง แต่ละเรื่องต่างกรรมต่างเวลากัน ดังนี้

๑) เหตุการณ์ในสมัยอดีต เรื่อง "เงินสะสมเพื่อสังคมสงเคราะห์"

๒) เหตุการณ์ในสมัยกลาง เรื่อง "กรมอากาศยานเกือบสลายตัว"

๓) เหตุการณ์ในสมัยปัจจุบันเรื่อง "อนุสาวรีย์ของกองทัพอากาศ"

เพื่อให้สำเร็จตามเป้าหมายดังกล่าวแล้ว ข้าพเจ้าได้ขอร้องให้นาวาอากาศโท สุจรัส กวีวัฒนา ปัจจุบัน นาวาอากาศเอก ช่วยบันทึกเรื่องที่ ๑) และที่ ๒) เมื่อบ่ายวันที่ ๒៩ มกราคม ๒๕๐๗ ครั้น ๓ กุมภาพันธ์ ๒๕๐๗ คุณสุจรัสฯ ก็นำเรื่องที่ ๑) มาให้ตรวจแก้ และเรื่องที่ ๒) ก็เสร็จทันกำหนดในวันที่ ៩ กุมภาพันธ์ ๒๕๐๗ เช่นเดียวกัน ส่วนเรื่องที่ ๓) ไม่อาจทำให้แล้วเสร็จได้ เพราะเป็นเรื่องยาว และต้องค้นหาเอกสารเพื่ออ้างอิงมาก "อนุสรณ์ของกองทัพอากาศ" ที่นับเป็นส่วนของทางราชการมี ๔ อนุสาวรีย์ คือ

(๑) อนุสาวรีย์แห่งแรก มีหลักฐานน้อยมาก และเราเรียกกันว่า "อนุสาวรีย์นักบิน" เพราะชั้นเดิมใช้เป็นที่บรรจุอัฐิของนักบินซึ่งเสียชีวิตในหน้าที่ราชการ อันเนื่องจากการเกิดอุบัติเหตุโดยเครื่องบินเท่านั้น แต่ต่อมาได้มีการเปลี่ยนแปลงระเบียบการใหม่ คือ ให้บรรจุอัฐิของข้าราชการในกองทัพอากาศทุกระดับยศชนที่เสียชีวิตในหน้าที่ราชการ หรือบุคคลที่ดีเด่นเป็นพิเศษ หรือบุคคลที่กองทัพอากาศเห็นเป็นการสมควร แม้จะไม่เสียชีวิตในหน้าที่ราชการก็ตาม ในปัจจุบันเรียกชื่อใหม่ว่า **"อนุสาวรีย์ทหารอากาศ"** ซึ่งตั้งอยู่ที่หน้ากองบัญชาการกองทัพอากาศ

(๒) **"อนุสาวรีย์องค์บุพการี"** (จอมพลสมเด็จพระเจ้าน้องยาเธอ เจ้าฟ้ากรมหลวงพิษณุโลกประชานาถ ในรัชกาลที่ ๖) เป็นพระรูปยืนเต็มพระองค์

(๓) **"อนุสาวรีย์สามบรรพบุรุษ"** (พลอากาศโท พระยาเฉลิมอากาศ (สุณี สุวรรณประทีป) นาวาอากาศเอก พระยาเวหาสยานศิลปสิทธิ์ (หลง สินสุข) และนาวาอากาศเอก พระยาทะยานพิฆาต (ทิพย์ เกตุทัต) เป็นรูปครึ่งตัวทั้ง ๓ ท่าน

(๔) **"อนุสาวรีย์ (วีรชน) ๘ ธ.ค. ๘๔"** ซึ่งประดิษฐานไว้ที่กองบิน ๕ ประจวบคีรีขันธ์ เพื่อเป็นอนุสาวรีย์ในการที่ทหารและตำรวจได้ต่อสู้ญี่ปุ่นผู้รุกราน เมื่อตอนเช้า ๘ ธันวาคม ๒๔๘๔ เริ่มสร้างเมื่อ ๒๐ มิถุนายน ๒๔៩๓ สร้างเสร็จเมื่อ ๖ พฤศจิกายน ๒๔៩๓ (๑៩๕๐) และทำพิธีเปิดและบรรจุอัฐิผู้วาย

ชนมีในการต่อสู้ญี่ปุ่น เมื่อ ๘ ธันวาคม ๒๔๘๓

เรื่องอนุสาวรีย์ดังกล่าวข้างบน ต้องเสียเวลาค้นหาหลักฐานอยู่นาน แต่ละเรื่องที่เขียนเสร็จก็นำลงในหนังสือข่าวทหารอากาศเป็นคราว ๆ ไป และเขียนเรื่องอนุสาวรีย์ ๘ ธ.ค. ๘๔ เป็นเรื่องสุดท้าย ซึ่งนำลงในหนังสือข่าวทหารอากาศ ฉบับเดือนธันวาคม ๒๕๑๔ เป็นการเสร็จสิ้นตามเป้าหมายทุกประการ

เรื่องใหม่ - เนื่องในวันที่ ๒๗ มีนาคม ๒๕๑๘(๑๙๗๕) กองทัพอากาศมีอายุครบ ๖๐ ปีบริบูรณ์ ถ้าเป็นข้าราชการก็เข้าเกณฑ์ต้องปลดเกษียณอายุแล้ว คุณประเสริฐฯ บรรณาธิการข่าวทหารอากาศคนเดิม ได้ขอให้ข้าพเจ้าเขียนเรื่องในอดีตอีกเช่นเคย ข้าพเจ้าเกือบจนปัญญาในการคิดค้นหาเรื่องที่เหมาะสมตามความมุ่งหมายของคณะกรรมการดังกล่าวข้างต้นนั้นได้ ภายหลังเมื่อคิดทบทวนดูแล้ว จึงเห็นว่าควรเขียนเรื่องของบุคคลสำคัญในอดีตบางท่านมากล่าวเพื่อให้เป็นเรื่องน่าอ่านอย่างประวัติศาสตร์บ้าง เบาสมองและอาจประทับใจผู้อ่านได้ตามสมควรบ้าง ซึ่งแม้ในตอนต้นจะเป็นเรื่องของชาวฟ้าต่างประเทศก็ตาม แต่ทั้งหมดก็เป็นเรื่องของชาวฟ้าด้วยกัน ซึ่งพอจะนำมาเปรียบเทียบกับเรื่องชาวฟ้าของไทยได้ ดังนั้น จึงตกลงใจนำเรื่องของ นายพลวิลเลียม "บิลลี่" มิทเชลล์ ซึ่งเป็นนักบินที่มีชื่อ "ดัง" ในสมัยสงครามโลกครั้งที่ ๑ และภายหลังสงครามครั้งนั้นมากล่าวนำ เพื่อเตือนอนุชนให้ระลึกถึงเรื่องของชาวฟ้าในสมัยประมาณ ๔๕ ปีมาแล้ว เพราะท่านผู้นี้มีความคิดเห็นการณ์ไกลในด้านการบินไว้มาก อันมีประโยชน์แก่ชาวโลก และโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ชาวฟ้าไทยในสมัยนั้น ก็นิยมชมชอบในความคิดเห็นของมิทเชลล์อยู่มากเหมือนกัน ฉะนั้นข้าพเจ้าจึงใคร่ขอให้ชื่อเรื่องในการเขียนครั้งนี้ว่า "ชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า" ดังได้กล่าวไว้ใต้ คำนำ นั้นแล้ว หากจะมีบกพร่องประการใดบ้าง ขอท่านผู้รู้ โปรดช่วยแก้ไขและข้าพเจ้าขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย.

จอมพลอากาศ

(ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี)

"ชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า"

กล่าวโดยทั่วไป

เมื่อสงครามโลกครั้งที่ ๑ ในระหว่างปี ค.ศ. ๑๙๑๔-๑๙๑๘ (๒๔๕๗-๒๔๖๑) จากฐานทัพหลายแห่งในประเทศเบลเยี่ยม นักบินเยอรมัน ได้โจมตีดินแดนประเทศอังกฤษด้วยเครื่องบินแบบต่าง ๆ มากมาย รวมทั้งเครื่องบินทิ้งระเบิดขนาดยักษ์ ซึ่งความกว้างของปีกสั้นกว่า บี.๒๙ เพียง ๓ ฟุตเท่านั้น การโจมตีเริ่มต้นกระทำในศตวรรษที่ ๑๙-๒๐ แห่งเดือนมกราคม ค.ศ. ๑๙๑๕ (๒๔๕๘) เรือเหาะเซพเพะลินส์ และเครื่องบินทิ้งระเบิดขนาดยักษ์โกธ่า ได้ทิ้งลูกระเบิดจำนวน ๒๗๐ ตันส์ลงในลอนดอนและที่อื่น ๆ ในเกาะอังกฤษ ฆ่าประชาชนมากกว่า ๑,๔๐๐ คน ดังนั้นการโต้ตอบของอังกฤษ จึงได้กระทำอย่างรุนแรงต่อสิ่งต่าง ๆ และเป็นการชักนำให้จัดตั้งกระทรวงทหารอากาศและกองทัพอากาศ และกองทัพอากาศอิสระในประเทศฝรั่งเศสในเดือนมิถุนายน ๑๙๑๘ (๒๔๖๑) ในบังคับบัญชา นายพลตรี ฮิว เทร้นชาด ซึ่งต่อมาได้เป็นจอมพล ภารกิจในเบื้องต้นของเทร้นชาด ก็คือทำการแก้แค้นเยอรมันในเขตหลังเป็นการตอบแทนเช่นเดียวกันด้วยเครื่องบินเดอฮาวิลแลนด์ แอนด์ แฮนด์ลี่เพจ กองทัพอากาศอิสระได้โจมตีศูนย์กลางอุตสาหกรรมของเยอรมัน ที่แมนน์ไฮม์, การิสรูเฮ, แฟร้งค์เฟิท, โคเบลนซ์ และสตุทท์กาท ในช่วงเวลาหลายเดือนตอนปลายสงคราม ต่อที่หมายดังกล่าว กองทัพอากาศอิสระได้ทิ้งลูกระเบิดทำลายจำนวน ๕๔๐ ตันส์ ในแดนเยอรมัน และฆ่าประชาชนประมาณ ๗๐๐ คน เทร้นชาด ได้เตรียมการโจมตีเบอร์ลินต่อไปขณะนั้นสงครามได้เสร็จสิ้นลงเสียก่อน

การจัดตั้งกำลังทางอากาศอิสระนั้น รัฐบาลอังกฤษได้สนับสนุนคำแนะนำของนายพลเอกแจน คริสเตียน สมัธส์ ผู้นำชาวอาฟริกาใต้ อันมีชื่อเสียง ซึ่งเป็นประธานกรรมการ ได้เสนอความเห็นต่อรัฐบาลอังกฤษ ในรายงานของเขา เขามีความเห็นว่าอาวุธอย่างใหม่ทางอากาศ ย่อมใช้ให้เป็นประโยชน์ในการปฏิบัติการต่าง ๆ อย่างอิสระในการสงครามได้เหมือนกัน และเน้นว่าไม่เหมือนทหารปืนใหญ่ กองทัพอากาศกองหนึ่ง An air fleet สามารถปฏิบัติการยุทธได้อย่างกว้างขวางไกลออกไป โดยอิสระ ยิ่งไปกว่ากองทัพบกและกองทัพเรือ เราสามารถมองเห็นการณ์ไกลจากปัจจุบันได้ว่า ไม่มีอะไรจำกัดอัตราส่วนในการใช้กองทัพอากาศอิสระในอนาคตได้อย่างแท้จริง และวันนั้นอาจจะไม่ไกลไปจากวันที่มีการยุทธทางอากาศ โดยก่อความเสียหายอย่างร้ายแรงแก่ดินแดนของข้าศึก และทำลายศูนย์กลางอุตสาหกรรมและตำบลที่มีพลเมืองหนาแน่นได้อย่างกว้างขวาง กองทัพอากาศจึงสามารถเป็นส่วนสำคัญในการทำสงครามยิ่งกว่าเหล่าอื่น ซึ่งการดำเนินการยุทธแบบเก่าของทหารบกและทหารเรือ อาจจะกลายเป็นอันดับรองและลูกน้อง

ความเห็นนี้ ได้รับความสนับสนุนเพียงเล็กน้อย อย่างไม่เป็นที่น่าประหลาดใจ บนทั้ง ๒ ฝั่งมหาสมุทรแอ็ทแอนทิค ในระหว่างนายพลทหารบกและนายพลทหารเรือทั้งหลาย นายพลทหารบกและทหารเรือ ได้คัดค้านความคิดในการปฏิบัติการทางอากาศโดยอิสระ และในทางทฤษฎีว่า เครื่องบินน่าจะยังอยู่ในบังคับบัญชากองทัพบกและกองทัพเรือต่อไป

ในประเทศสหรัฐฯ นายพลจัตวา วิลเลียม "บิลลี่" มิทเชลล์ ผู้มีความศรัทธาที่แท้จริงผู้หนึ่งในเรื่องอำนาจทางอากาศ (In air power) เขาได้ทำหน้าที่ผู้บังคับทหารอากาศฝ่ายสัมพันธมิตร ได้ผลดีใน

แนวรบด้านตะวันตก (On the Western Front) ได้ปรากฏในหัวข่าวหนังสือพิมพ์ทั่วโลกใน ค.ศ. ๑๙๒๑ (๒๔๖๔) ขณะที่ฝูงบินของเขาได้จมเรือสงครามจำนวนหนึ่งซึ่งยึดมาจากเยอรมันในระหว่างแสดงการทดลองการทิ้งระเบิดในอ่าวเชสะพีค (Chesapeake Bay) มิทเชลล์ ได้คิดถึงแบบอันมีค่าที่ดีของอังกฤษซึ่งควรเอาอย่าง จึงได้เร่าร้อนใจเสนอให้จัดกำลังทหารอากาศสหรัฐฯ อย่างอิสระ แต่ผู้บังคับบัญชาชั้นเหนือไม่เห็นด้วย รวมทั้งนายพลเอก จอน เจ.เปอร์ชิง เสนาธิการทหารบกก็ได้สรุปรายงานแสดงความเห็นของเขาอย่างชัดแจ้ง ถึงรัฐมนตรีว่าการกระทรวงกลาโหม เมื่อ ๑๓ กันยายน ๑๙๒๔ (๒๔๖๗) ก่อนปลดเกษียณอายุ เขาได้กล่าวว่าแผนการบินอเมริกัน (The American Air Service) ได้จัดตั้งขึ้นเป็นองค์ประกอบ "เพื่อช่วยเหลืออย่างสำคัญแก่กองทัพบกในราชการสนาม" เสมือนอาวุธช่วยรบ (As an auxiliary arm) ผลดีที่สุดในการปฏิบัติของหน่วยนี้ก็คือ "การร่วมมืออย่างใกล้ชิดที่สุดกับกองทหารที่พื้นดิน"

เปอร์ชิง ได้ปฏิเสธอย่างดูถูกในการอวดอ้างของทหารอากาศ ในเรื่องที่ทหารอากาศอ้างว่า "ได้ทำความเสียหายอย่างร้ายแรงต่อนครใหญ่ ๆ ของข้าศึกและสิ่งก่อสร้างต่าง ๆ เป็นอันมาก" ในยามสงครามนั้น ได้พิสูจน์แล้วเป็นเรื่องเหลวไหล เขาได้กล่าวว่า ผู้ไปตรวจสอบทางพื้นดิน ได้พบความเสียหายเพียง "เล็กน้อย" เกือบทั้งหมด เขายอมรับว่า สงครามในอนาคตอาจจะมีบางสิ่งเสียหายมากขึ้นจากการโจมตีทางอากาศ แต่กองทัพบก "ยังต้องสู้รบและการได้ชัยชนะนั้นก็ต้องปราบกำลังของฝ่ายข้าศึก" บนพื้นดิน ในการแสดงการทดลองของมิทเชลล์เหนืออ่าวเชสะพีคนั้น เปอร์ชิง โต้แย้งว่า "ความวิวัฒนาการในด้านความแม่นยำของปืนใหญ่ต่อสู้อากาศยานย่อมเกิดมีขึ้นเพื่อขัดขวางความก้าวหน้าในการบิน"

เนื่องจากความคิดเห็นขัดแย้งกันนี้ มิทเชลล์ ไม่อาจจะอดกลั้นการโฆษณาความคิดเห็นของเขาทางหนังสือพิมพ์ได้ แม้ภายหลังได้ถูกปลดจากตำแหน่งผู้ช่วยหัวหน้าแผนกการบินในกรุงวอชิงตันและเนรเทศไปอยู่ที่ แซน แอนโทนิโอ เท็กซัซ (TEXAS) แล้วก็ตาม เขาก็ไม่ยอมสงบปาก ใน ๓ กันยายน ๑๙๒๕ (๒๔๖๘) เมื่อเรือเหาะ (รูปซิการ์) ของกองทัพเรือชื่อ "เชนแอนโดอาห์" ซึ่งบังคับได้ ได้เกิดอุบัติเหตุตกชนดินและได้ฆ่าผู้บังคับการฯ และคนอื่น ๆ อีก ๑๓ คน มิทเชลล์ ได้ออกข่าวประกาศในหนังสือพิมพ์กล่าวโทษผู้บังคับบัญชาชั้นสูงของกองทัพเรือและกองทัพบกว่า "ไร้ความสามารถ ประมาทในทางอาญา และดำเนินการป้องกันประเทศใกล้ความผิดฐานกบฏ" เขาได้ถูกนำตัวมาขึ้นศาลทหารในกรุงวอชิงตัน และถูกลงโทษในฐานะไม่เชื่อฟังคำสั่ง ตามคำพิพากษาของคณะลูกขุนที่เป็นนายพลทหารบกได้ลงความเห็นให้เขา "พ้นจากยศพลจัตวา การบังคับบัญชาและภารกิจ พร้อมกับการใช้หนี้ความผิดโดยงดจ่ายเงินเดือนทั้งหมดและค่าจ้างต่าง ๆ เป็นเวลา ๕ ปี ในไม่ช้าต่อมา ประธานาธิบดี แคลวิน คูลิดจ์ ได้ลงความเห็นชอบในการลงโทษตามคำสั่งของศาลฯ ในเดือนมกราคม ๑๙๒๖ (๒๔๖๘) มิทเชลล์ ได้ลาออกจากราชการเมื่อ ๑ ก.พ. ๑๙๒๖ (๒๔๖๘) และถึงแก่กรรมเมื่อ ๒๙ ก.พ. ๑๙๓๖ (๒๔๗๙) ปล่อยเรื่องอำนาจทางอากาศแก่ประชาชนอเมริกันเพื่อวินิจฉัยต่อไป

ต่อมา ประธานาธิบดี คูลิดจ์ (ประธานาธิบดีสหรัฐฯ คนที่ ๓๐ ในระหว่างปี ๑๙๒๓ (๒๔๖๖) ถึง ๑๙๒๙ (๒๔๗๓) ได้สนับสนุนคำร้องและประกาศอภัยโทษที่เขาถูกงดยศชั้นและอื่น ๆ และได้ตั้งเงินเดือนให้มิทเชลล์เพียงครึ่งหนึ่งของอัตราเงินเดือนเดิมทุกเดือน ในปี ๑๙๔๕ (๒๔๘๘) ภายหลังมรณกรรมไปแล้ว มิทเชลล์ ได้เลื่อนยศเป็นพลตรี และได้รับเหรียญกล้าหาญเป็นบำเหน็จความชอบ (The Congressional Medal of Honor...) "in recognition of service and foresight in aviation." "เพื่อเป็นที่ระลึกที่รับราชการดีเด่นมาด้วยดี และเป็นผู้เห็นการณ์ไกลในด้านการบิน"

หมายเหตุ

คณะกรรมการศาลฝ่ายทหารเรือ ซึ่งสอบสวนความล่มจมอันน่าเศร้าสลดของเรือเหาะ “เชนแอนโดอาห์” (Shenandoah) ในปี ๑๙๒๕ (๒๔๖๘) ได้ออกหมายเรียกนายพลจัตวามิทเชลล์ (คนนั่งกลาง) ซึ่งแต่งตัวเครื่องแบบทหารในยศพันเอกถาวรมาให้การ เขาได้ปฏิเสธในการให้การเป็นพยาน “เพื่อป้องกันสิทธิของเขา” เมื่อ ๒๘ ตุลาคม ๑๙๒๕ (๒๔๖๘) คำปฏิเสธได้ผ่านทนายความของเขา ซึ่งเป็นสมาชิกสภาผู้แทนราษฎร แฟร้งค์ อาร์ ไร้ด์ แห่งมลรัฐอิลลินอยส์ (ผู้กำลังยืนข้างหลังมิทเชลล์)

เมื่อสิ้นสมัยนายพลมิทเชลล์แล้ว แผนการบิน (The Air Service) **ได้เปลี่ยนชื่อใหม่ว่า "กองบินทหารบก"** (The Army Air Corps) **ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปร่างและท่าทีเพียงเล็กน้อย** อย่างไรก็ดี ผู้ที่เคยอยู่ในใต้บังคับบัญชาของมิทเชลล์ รู้สึกพอใจเรื่องการวิวัฒนาการกำลังคืบหน้าในทางเท็คนอโลยี่ที่เกี่ยวกับอากาศยานอยู่บ้าน **สำหรับกองบินทหารบกนั้น ประวัติการณ์ที่ควรจำก็คือ การดำเนินการสร้างเครื่องบินทิ้งระเบิดเครื่องยนต์คู่แบบ บี.๙ เป็นเครื่องบินทิ้งระเบิดที่สร้างด้วยโลหะทั้งตัวลำแรกของโลก ซึ่งตั้งต้นในปี ๑๙๓๐ (๒๔๗๓) บริษัทโบอิ้งแอร์คร๊าฟต์, ซีแอ็ทเทิ้ล, วอชิงตัน เป็นผู้ผลิต ซึ่งเครื่องบินแบบนี้เหมือน บี.๒๙** ภายหลังทดลองเครื่องบินแบบแรกในเดือนเมษายน ๑๙๓๑ (๒๔๗๔) เสร็จแล้ว บริษัทโบอิ้งได้ส่งเครื่องแบบแรกนี้ไปยัง ไร้ท์ ฟิลด์, เดตั้น, โอไฮโอ ศูนย์วิวัฒนาการและทดลองของกองบินทหารบก (The Air Corps' development and test Center) พอใจในสมรรถนะของเครื่องบิน ความเร็วสูงสุด ๑๘๘ ไมล์/ชม. ในระยะสูง ๖,๐๐๐ ฟุต กองทัพบกสั่งซื้อแบบเดิมและเครื่องบินอีก ๖ เครื่อง

ต่อมาในไม่ช้า มีเครื่องบินอีก ๒ เครื่องเข้ามาแทนที่ บี.๙ สร้างโดยบริษัท มาร์ติน (Martin Company) เดนเวอร์, โคโรราโด **เครื่องหนึ่งคือ บี.๑๐** โลหะทั้งตัวตามแบบเดิมกับพับฐานได้ในระหว่างการทดลองที่ ไร้ท์ ฟิลด์ ในเดือนกรกฎาคม ๑๙๓๒ (๒๔๗๕) เครื่องบินมีความเร็วสูงสุดได้ ๑๙๗ ไมล์/ชม. ในระยะสูง ๖,๐๐๐ ฟุต ภายหลังเปลี่ยนเครื่องยนต์ใหม่ในเดือนตุลาคม ๑๙๓๒ เครื่องบินนี้ บินความเร็วสูงสุดได้ ๒๐๗ ไมล์/ชม. ในระยะสูง ๒๑,๐๐๐ ฟุต พอใจในสมรรถนะที่สูงขึ้น กองบินทหารบกสั่งซื้อ บี.๑๐ เมื่อ ๑๗ มกราคม ๑๙๓๔ (๒๔๗๗) จำนวน ๔๘ เครื่อง ในราคา ๒,๔๔๐,๐๐๐ เหรียญสหรัฐฯ ต่อมาได้เพิ่มเครื่องช่วยเร่งกำลังเครื่องยนต์ให้ดีขึ้น ความเร็วได้เพิ่มขึ้นถึง ๒๑๓ ไมล์/ชม. และมีเพดาน

บินถึง ๒๔,๒๐๐ ฟุต เครื่องบินสามารถบรรทุกลูกระเบิดอย่างมากประมาณ ๒,๒๐๐ ปอนด์ เครื่องบินมาร์ตินลำที่ ๒ บี.๑๒ ไม่ได้แสดงสมรรถนะให้ดีกว่า กองบินทหารบกได้ตกลงใจซื้อ บี.๑๐ เป็นหลักในราชการต่อไป เครื่องบินแบบนี้ยังใช้อยู่ในกองบินทหารบกขณะที่ญี่ปุ่นได้โจมตี เพิล ฮาร์เบอร์ ในปี ๑๙๔๑ (๒๔๘๔) นี่เป็นวิวัฒนาการในการเปลี่ยนแปลงเครื่องบินทิ้งระเบิดแบบต่าง ๆ จนถึง บี.๒๙ (The Superfortress) ซึ่งเป็นอาวุธสำคัญ บินไปโจมตี ฮิโรชิม่า (Hiroshima) และนากาซากิ (Nagasaki) ด้วยลูกระเบิดปรมาณู ในสงครามโลกครั้งที่ ๒ ทำให้ญี่ปุ่นยอมแพ้โดยปราศจากเงื่อนไข นี่เป็นไปตามคำทำนายของนายพลมิทเชลล์ที่ว่า **"สงครามในอนาคตนั้นย่อมสงบลงได้ด้วยอำนาจทางอากาศ"**

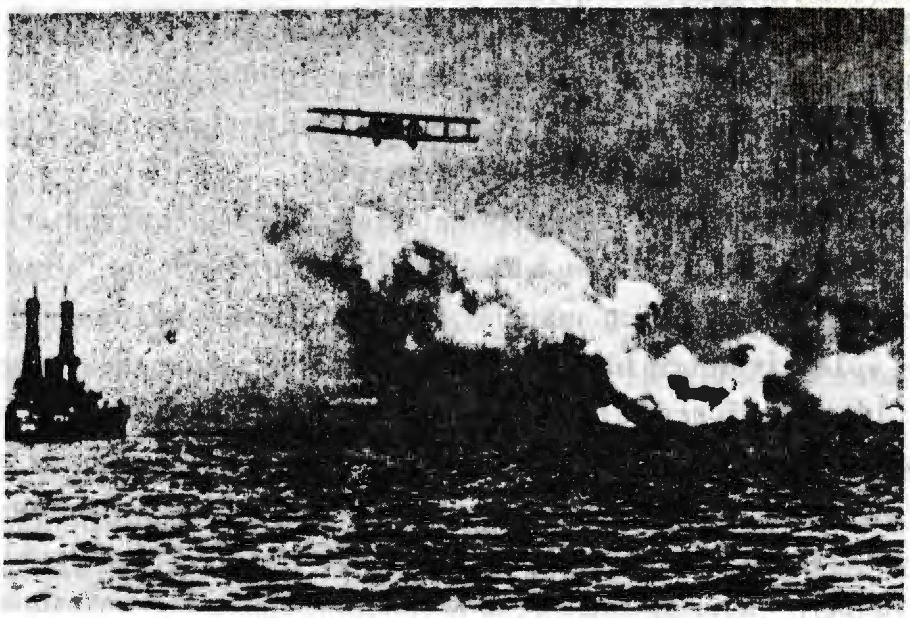
กล่าวโดยเฉพาะ

อวสานเรือสงครามลำหนึ่ง ในการทดลองซึ่งอำนวยการโดยนายพลมิทเชลล์ เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๒๑ (๒๔๖๔) ได้พิสูจน์ให้เห็นว่า การระเบิดใต้น้ำใกล้ตัวเรือ ย่อมเป็นอันตรายอย่างมหันต์ ยิ่งไปกว่าลูกระเบิดถูกตรงตัวเรือ การทดลองครั้งนี้ซึ่งแสดงให้เห็นจริงจนปรากฏชัดว่า เรือสงคราม (Battleship) ย่อมเป็นอันตรายเนื่องด้วยการถูกโจมตีจากทางอากาศได้ คำทำนายส่วนใหญ่ของมิทเชลล์ จึงเผยแพร่ออกมาว่า สงครามในอนาคตนั้น อาจสงบลงได้ด้วยอำนาจในทางอากาศ มิทเชลล์ ได้ตำหนินโยบายทางทหารอย่างรุนแรง ในเมื่อต่างฝ่ายได้มองข้ามหน้าที่สำคัญของเครื่องบินจนหมดสิ้น

หมายเหตุ

เรื่องข้างต้นนั้นมีที่มาว่า เมื่อเสร็จสิ้นสงครามโลกครั้งที่ ๑ นั้น สหรัฐฯ ได้รับเรือสงครามประมาณ ๔ ลำ และเรือรบอื่น ๆ อีกหลายสิบลำ เป็นค่าปรับจากเยอรมัน ซึ่งมิทเชลล์เห็นว่าเป็นเรือเก่าและล้าสมัย จึงรายงานผู้บังคับบัญชาขออนุมัตินำมาทดลองว่าจะต้านทานอานุภาพอากาศได้หรือไม่? และในที่สุดได้รับอนุมัติจากรัฐสภาฯ ให้นำเรือเหล่านี้ไปทำเป็นเป้าในการทิ้งระเบิด เพื่อพิสูจน์ว่า ไม่ควรมองข้ามกำลังทางอากาศซึ่งหมายถึงเครื่องบิน จะเป็นส่วนสำคัญในการป้องกันประเทศ ไม่หย่อนไปกว่ากองทัพบกและเรือเลย เพราะสามารถไปทำลายที่หมายทั้งในทางยุทธศาสตร์และทางยุทธวิธี ด้วยจำนวนเครื่องบินนับเป็นร้อย ๆ หรือพัน ๆ เครื่อง คราวละหลายระรอก ได้ก่อนทหารเหล่าอื่น ๆ และอย่างฉับพลันด้วย

ในการทดลองเพื่อพิสูจน์ข้อเท็จจริงในครั้งนี้ เขาได้อำนวยการให้เรือรบตั้งแต่ขนาดเล็กที่สุดจนถึงเรือสงคราม ไปทอดสมออยู่ในอ่าวเชสะพีค, เวอร์ยิเนีย แล้วได้สั่งใช้เครื่องบินบรรทุกลูกระเบิด ตั้งแต่ ๕๐๐ ปอนด์ถึง ๑,๐๐๐ ปอนด์ โจมตีเรือรบขนาดย่อมจมลงอย่างง่ายดาย ส่วนเรือสงครามนั้น เขาได้ดัดแปลงเครื่องบินมาร์ตินบอมเบอร์ แบบเก่าปีก ๒ ชั้น ให้สามารถติดลูกระเบิดขนาดลูกละ ๒,๐๐๐ ปอนด์ และนำไปได้คราวละ ๒ ลูก ซึ่งในที่สุดก็สามารถจมเรือสงครามนั้น ๆ ได้ แม้ลูกระเบิดตกลงข้างเรือสงครามเพียงลูกเดียว โดยเขาถ่วงชนวนให้ระเบิดช้า อำนาจแรงระเบิดใต้น้ำใกล้ท้องเรือ ทำให้เรือกระดอนขึ้นเหนือผิวน้ำ แล้วตกลงมาอย่างแรง ประกอบกับลำเรือตอนใต้ระดับน้ำไม่มีเกราะ เมื่อท้องเรือถูกแรงระเบิดและแรงกระแทกจากน้ำหนักของเรือเองอย่างแรง จึงทำให้เรือชำรุดและเสียหายจนจมลงได้ (ดูรูปที่ ๒)



การทดลองด้วยแสดงให้เห็นจริงในครั้งนั้น ดำเนินต่อเนื่องกันไปหลายวันต่อหน้าฝ่ายรัฐบาล สมาชิกรัฐสภา เจ้าหน้าที่ทหารบก ทหารเรือ และผู้แทนหนังสือพิมพ์ซึ่งได้ไปสังเกตการณ์อยู่ในเรืออำนวยการ (ดูรูปที่ ๒ ทางซ้ายมือ) ข่าวนี้ได้กระจายไปทั่วโลกโดยรวดเร็วว่ากำลังอากาศจะเป็นกำลังสำคัญมากอีกส่วนหนึ่งในอนาคต

ในประเทศของเราท่านเจ้ากรมอากาศยาน (เจ้าคุณพ่อ) ได้สนใจมากจึงให้ ร.อ.สุดใจ จันทรเวคิน (ต่อมาเป็น พ.ท.พระภาษาศรีรัตน์) หัวหน้ากองล่าม แปลข่าวเรื่องข้างต้นเป็นภาษาไทย แล้วแจกให้ทุกกองบินทราบทั่วกัน ซึ่งผู้เขียนได้สนใจในข่าวนี้เป็นอย่างยิ่ง พูดง่าย ๆ ว่า "โปรนายพลมิทเชลล์ ไม่น้อยกว่าเจ้าคุณพ่อทีเดียว"

สงครามช่วยชี้ขาดเรื่องประสิทธิภาพของเครื่องบิน

เรื่องดังกล่าวมาแล้ว ย่อมเห็นได้ว่า นายพลจัตวามิทเชลล์ ได้พยายามต่อสู้อย่างแท้จริงโดยลำดับเพื่อให้แผนกการบินกองทัพบกสหรัฐฯ ขยายการจัดกำลังเป็นกองทัพอากาศ (อิสระ) เช่นเดียวกับกองทัพบกและเรือ จนตนเองได้รับโทษฐานขัดคำสั่งและหมิ่นประมาท ต่อมาในภายหลังที่มิทเชลล์ได้ออกจากราชการไปแล้ว แผนกการบินจึงเปลี่ยนชื่อใหม่ว่า "กองบินทหารบก" แต่มีการเปลี่ยนแปลงสิ่งต่าง ๆ เพียงเล็กน้อยเท่านั้น ครั้นเขาสิ้นชีพไปแล้วหลายปี รัฐบาลสหรัฐฯ จึงได้ยอมรับนับถือคำพยากรณ์ของเขาว่าเป็นความเห็นที่ถูกต้องในเมื่อสงครามโลกครั้งที่ ๒ ได้ยุติลงแล้ว

การที่รัฐบาลอเมริกัน ยอมเชื่อถือว่าเป็น "ความเห็นที่ถูกต้อง" นั้น อาจเป็นไปตามข้อเท็จจริงดังนี้.-

- ตอนปลายสงครามโลกครั้งที่ ๒ นั้น เครื่องบินอังกฤษ-อเมริกัน จำนวนนับร้อย ๆ ถึงพันเครื่องได้ไปทิ้งระเบิดถล่มที่หมายในทางยุทธศาสตร์ เป็นระลอก ๆ ทั้งกลางคืนและกลางวัน ลึกเข้าไปในดินแดนของข้าศึก ซึ่งได้ทำลายบ่อเกิดแห่งกำลังต่อสู้ของฝ่ายอักษะประเทศ เสียหายยับเยิน เป็นผลให้ข้าศึกหมดกำลังใจในการต่อสู้ จึงยอมแพ้โดยปราศจากเงื่อนไข

- เรือรบขนาดย่อมและเรือสงครามของสหรัฐฯ ถูกเครื่องบินญี่ปุ่นจากเรือบรรทุกเครื่องบินรุมโจมตีด้วยตอปิโดและลูกระเบิดจากทางอากาศ จมลงคาสมอในที่จอดเรือในเพิล ฮาเบอร์, ฮาไวอิ เมื่อเช้าวันที่ ๗ ธันวาคม ๒๔๘๔ (๑๙๔๑) และเครื่องบินที่ป้องกันฐานทัพก็ถูกทำลายในโอกาสเดียวกัน **ทำให้สหรัฐฯ ได้รับบทเรียนอันมีค่าสูงมาก จึงหมดกำลังต่อสู้ไปชั่วขณะหนึ่ง**

- ส่วนทางใต้ประเทศไทย ก็มีเหตุการณ์ที่ทำลายขวัญฝ่ายอังกฤษกับสัมพันธมิตรอยู่มากเหมือนกัน กล่าวคือ เมื่อเช้าวันที่ ๙ หรือ ๑๐ ธันวาคม ๒๔๘๔ ขณะเรือสงคราม "ริปัลซ์" และ "ปริ้นซ์ อ๊อฟ เวลส์" ซึ่งอังกฤษเชื่อว่าเป็นเรือที่มีอำนาจมาก เพราะมีอาวุธยิงจำนวนมากและทันสมัยที่สุด ทั้งลำเรือก็มีเกราะแข็งแรงมาก จนได้ชื่อว่า "เป็นเรือไม่รู้จักจม" พร้อมทั้งเรือ บริวาร กำลังแล่นเสียบฝั่งแหลมมลายู จากสิงคโปร์ ขึ้นไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ เพื่อแสดงแสนยานุภาพเป็นการบำรุงขวัญพลเมืองสิงคโปร์-มะลายู เมื่อเรือสงครามทั้ง ๒ ลำ พร้อมด้วยเรือบริวาร แล่นเข้าไปใกล้โกตาบารู รัฐกลันตัน (ทางใต้จังหวัดนราธิวาส) ก็ได้ถูกเครื่องบินญี่ปุ่นจากเรือบรรทุกเครื่องบิน และฐานทัพไซ่ง่อน รุมโจมตีเรือ "ปริ้นซ์ อ๊อฟ เวลส์" ซึ่งเป็นเรือธงก่อน จนแล่นตะแคงควงเป็นวงกลม แล้วจึงถล่มเรือ "รีปัลซ์" จมลงอย่างง่ายดายในตอนเช้าวันนั้นเอง ส่วนเรือธงได้ถูกรุมตีหนักด้วยตอปิโดและลูกระเบิดจากเครื่องบินต่อเนื่องกันไปและได้จมลงก่อนค่ำในวันเดียว

- บี.๒๙ จากเกาะทีเนียนในหมู่เกาะมาเรียน่า ได้ปล่อยลูกระเบิดปรมาณูลงในเมืองฮิโรชิม่า (Hiroshima) ประเทศญี่ปุ่นเป็นครั้งแรก เมื่อ ๖ สิงหาคม ๒๔๘๘ (๑๙๔๕) ทำให้คนบาดเจ็บล้มตาย ๑๒๙,๐๐๐ คน และต่อมาได้ปล่อยลูกระเบิดปรมาณูลูกที่ ๒ ลงในเมืองนากาซากิ (Nagasaki) เป็นครั้งที่ ๒ เมื่อ ๙ สิงหาคม ๒๔๘๘ ทำให้คนบาดเจ็บล้มตาย ๙๕,๐๐๐ คน ด้วยอำนาจของลูกระเบิดปรมาณูลูกที่ ๒ นี้เอง **ทำให้สมเด็จพระมหาจักรพรรดิแห่งประเทศญี่ปุ่น** ได้ทรงประกาศยอมแพ้ทางวิทยุ โดยปราศจากเงื่อนไข**ในทันที และไม่มีทหารบก-เรือของสหรัฐฯ ไปยกพลขึ้นบกแม้แต่น้อย**

หมายเหตุ

บี.๒๙ จากเกาะกวม (ใต้ไซปัน) และจากเกาะไซปัน (เหนือเกาะทีเนียนเล็กน้อย) ในหมู่เกาะมาเรียน่า ได้บินไปปล่อยลูกระเบิดเพลิงลงในเมืองต่าง ๆ ของประเทศญี่ปุ่นโดยลำดับ ดังนี้.-

๑. โตเกียว, เมืองหลวงของญี่ปุ่น เมื่อ ๒๕ กุมภาพันธ์ ๒๔๘๘ (๑๙๔๕) เป็นครั้งแรก ต่อมาได้ปล่อยลูกระเบิดเพลิงจำนวนมากในคืนวันที่ ๙-๑๐ มีนาคม ปีเดียวกัน ก่อให้เกิดความเสียหายอย่างกว้างขวาง และรุนแรง ทำให้คนบาดเจ็บล้มตาย ๑๒๔,๐๐๐ คน

๒. นาโกย่า เมืองอุตสาหกรรมอากาศยาน ในคืนวันที่ ๑๑-๑๒ และ ๑๙ มีนาคม ๒๔๘๘ ก่อให้เกิดความเสียหายเช่นวันก่อน

๓. โอซาก้า, เมืองท่า ในคืนวันที่ ๑๔-๑๕ มีนาคม ๒๔๘๘ ทำให้คนบาดเจ็บล้มตาย ๑๓,๐๐๐ คน

๔. โกเบ, เมืองท่า ในคืนวันที่ ๑๖-๑๗ มีนาคม ๒๔๘๘ ทำให้คนบาดเจ็บล้มตาย ๑๕,๐๐๐ คน

แม้จะเสียหายอย่างวอดวายก็ตาม ญี่ปุ่นยังดื้อไม่ยอมแพ้ ครั้นถูกลูกระเบิดปรมาณูลูกที่ ๒ จึงยอมแพ้ทันทีดังกล่าว

- แม้กล่าวเป็นส่วนรวม ย่อมเห็นได้ชัดว่า นายพลมิทเชลล์ มีความสำคัญต่อสหรัฐฯ มากที่สุด และสรุปเป็นบทเรียนได้ ดังนี้.-

๑) เขาต่อสู้เพื่อให้แผนกการบิน ขยายการจัดกำลังให้มีฐานะเท่าเทียมกองทัพบกและเรือ ด้วยเหตุผลที่ดีอย่างสุจริตใจและแน่นอน โดยปราศจากอคติ แม้จะเป็นการรุนแรงจนถูกขึ้นศาลทหารฐานขัด

คำสั่งก็ตาม มิทเชลล์ ก็มิได้ชักชวนใครเข้าร่วมมือต่อสู้ ซึ่งอาจทำให้ผู้อื่นต้องร่วมรับเคราะห์กรรมด้วย คือไม่รวมกันเรียกร้อง หรือเดินขบวนเรียกร้อง เพื่อก่อให้เกิดความปั่นป่วนในการปกครอง ดังที่เป็นอยู่ในบ้านของเราในขณะนี้ โดยชนส่วนน้อยบางจำพวกมักชอบใช้สิทธิและเสรีภาพ เกินขอบเขตของกฎหมายบ่อย ๆ ตามที่เรียกกันว่า "กฎหมู่" นับว่าเป็นอันตรายร้ายแรงต่อบ้านเมืองมากที่สุด

๒) เมื่อขึ้นศาลทหาร แม้เขาจะมีสิทธิในการให้การเป็นพยานแก่ตนเอง เพื่อผ่อนคลาย ความหนักเป็นเบาสำหรับประโยชน์ของเขาก็ตาม เขาก็ไม่ปรารถนาจะทำเช่นนั้น แต่ได้ตอบปฏิเสธในการที่จะเปลี่ยนแปลงความคิดเห็นอันแน่วแน่ของเขา

๓) เมื่อศาลทหารมีคำสั่งลงโทษเขาแล้ว เขาก็ยอมสงบปากด้วยดี และปล่อยปัญหาเรื่องการขยายกำลังแผนกการบินให้มีฐานะเป็นกองทัพอากาศเท่าเทียมกองทัพบกและเรือไว้ให้ประชาชนอเมริกันเป็นผู้พิจารณาข้อเท็จจริงและวินิจฉัยต่อไป

๔) มิทเชลล์เป็นนักบินชั้นยอดของนักบินทั้งหลาย มีคุณงามความดีเด่นจากสงครามโลกครั้งที่ ๑ และต่อมาก็ได้ปฏิบัติให้สำเร็จภารกิจด้วยดี และเป็นผู้มองเห็นการณ์ไกลในด้านการบินแม้จะสิ้นชีวิตไปแล้ว เขาก็ยังมีเกียรติได้รับการอภัยโทษ เพราะคุณงามความดีที่สะสมไว้ จึงได้เลื่อนยศเป็นพลตรีของกองทัพบก และทายาทก็เป็นผู้แทนมารับเหรียญหล้าหาญเพื่อเป็นเกียรติแก่วงศ์ตระกูลของเขาสืบไป นี่เป็นตัวอย่างของความดี ซึ่งตรงกับพุทธภาษิตที่ว่า "ทำดี ได้ดี" ซึ่งแม้ไม่ปรากฏผลดี ขณะที่เขายังมีชีวิตอยู่ แต่ต่อมา "ความดี" ก็ปรากฏเป็นความจริง ซึ่งอนุชนรุ่นหลังควรยึดถือเป็นตัวอย่าง

๕) เมื่อนายพลมิทเชลล์ลาออกจากราชการไปแล้ว ได้มีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย และเปลี่ยนชื่อแผนกการบินฯ เป็นกองบินทหารบก และในระหว่างสงครามโลกครั้งที่ ๒ เมื่อเขาสิ้นชีพไปแล้ว ก็เริ่มมีการจัดกำลังเข้าถึงขั้นกองทัพอากาศ ตามแนวความคิดเห็นของมิทเชลล์แล้วเหมือนกัน เพราะลูกศิษย์ของเขาส่วนมาก ยังประจำการอยู่ในกองทัพบกนั่นเอง อย่างไรก็ดี การที่ยังไม่เปลี่ยนชื่อว่า "กองทัพอากาศ" นั้น คงเป็นเพราะบรรดานายพลทหารบก-ทหารเรือ ยังอาจมีอคติและถือทิฐิมานะอยู่ จึงไม่สนับสนุนให้เลื่อนฐานะสูงกว่า "กองบินทหารบก" ในขณะนั้น ครั้นสงครามโลกครั้งที่ ๒ จบไปแล้ว ใคร ๆ ย่อมเห็นความดีเด่นของกองบินทหารบกว่าสามารถทำการเป็นอิสระได้อย่างกว้างขวาง เช่นเดียวกับความคิดเห็นของอังกฤษ และมิทเชลล์เหมือนกัน และเมื่อไม่มีทางเลือกเป็นอย่างอื่น จึงต้องยินยอมสนับสนุนให้เลื่อนฐานะจากกองบินทหารบกเป็นกองทัพอากาศ (อิสระ) เช่นกองทัพบกและกองทัพเรือแต่นั้นมา

๖) นายพลมิทเชลล์ เป็นผู้ไม่เห็นแก่ประโยชน์เพื่อตนเอง แม้เขาจะรับความวิบัตินา ๆ ประการก็ตาม แต่เขาก็ยังมุมานะให้ความสว่างในด้านการบินอย่างเปิดเผยแก่ส่วนรวมจึงประเทศต่าง ๆ (เว้นอังกฤษซึ่งเป็นชาตินำแต่งตั้งกองทัพอากาศเป็นครั้งแรกในตอนปลายสงครามโลกครั้งที่ ๑ อยู่ก่อนแล้ว) ยึดแนวคำพยากรณ์ของเขาไปดำเนินการจัดตั้งกองทัพอากาศสำหรับป้องกันประเทศตามโอกาสและฐานะกำลังเศรษฐกิจแห่งประเทศของตน

๗) นอกจากความคิดเห็นในด้านการบินของมิทเชลล์ อันเป็นบทเรียนแก่กรมอากาศยานโดยทั่วไปแล้ว มิทเชลล์ยังมีความสัมพันธ์โดยใกล้ชิดกับเจ้าคุณพ่อมาก และมีสิ่งสมควรที่นับเป็นประวัติศาสตร์ได้คือ ขณะเมื่อเขาบินเดินทางวนเวียน เพื่อสำรวจภูมิประเทศสำหรับป้องกันภัยทางอากาศของสหรัฐฯ ทางด้านมหาสมุทรแปซิฟิก เป็นเวลา ๕ เดือนในปี ๒๔๖๗ (๑๙๒๔) และได้มาพักอยู่ที่ฟิลิปปินส์เป็นเวลาอันสมควรแล้ว จึงเดินทางมายังประเทศ (สยาม) เพื่อศึกษาสถานการณ์ต่าง ๆ ซึ่งเขากับเจ้าคุณพ่อได้สนทนาแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเป็นผลที่พอใจด้วยกันทั้งสองฝ่าย และก่อนเดินทางต่อไป เขาได้ขออนุญาตทำการสอบเพื่อต่ออายุการบิน ซึ่งเขาขอบินกับเครื่องบินเบร์เก้ต์ แบบ ๑๔ เครื่องยนต์ เรโนลท์ ๓๕๐

แรงม้า โดยบินขึ้นลง ๑๐ เที่ยว กับบินเป็นรูปเลข ๘ ในเขตที่กำหนดให้ในระยะสูง ๒,๐๐๐ เมตร (ตามระเบียบการทดสอบฝีมือบินเพื่อต่ออายุการบินทุก ๆ รอบ ๖ เดือน ซึ่งคล้ายกับการสอบต่ออายุการบินของนักบินตรวจการของไทยเหมือนกัน) ผลของการบินทดสอบเป็นไปได้ด้วยดีมาก

หมายเหตุ

การที่มิทเชลล์ บินกับเครื่องบินแบบนี้ได้ดีก็เพราะเขาเคยบินมาแล้วในสงครามโลกครั้งที่ ๑ นับเป็นเกียรติประวัติของกองทัพอากาศไทย ที่มีนักบินชั้นนำของสหรัฐฯ ไว้วางใจมาสอบต่ออายุการบินด้วยเครื่องบินไทยเป็นครั้งแรกและเป็นคนเดียวจนบัดนี้ ส่วนการบินสอบฝีมือบินนั้น เป็นวันที่ ๑๕ เมษายน พ.ศ. ๒๔๖๗ โดยใช้สนามบินดอนเมืองและที่สนามราชตฤนมัยสมาคม

การเปรียบเทียบชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า

ก่อนจะเปรียบเทียบชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้าไทยกับของสหรัฐแล้ว ใคร่จะขอนำเรื่องการจัดกำลังทางอากาศของไทยในอดีตมากล่าว เพื่อทราบข้อมูลพอสังเขปดังต่อไปนี้

นายพันตรี หลวงศักดิ์ศัลยาวุธ (สุณี สุวรรณประทีป) ต่อมาเป็น พลอากาศโท พระยาเฉลิมอากาศ ซึ่งเราเรียกท่านว่า "เจ้าคุณพ่อ" แม้ท่านจะขี้เหนียวมาก จนลูกน้องไม่ใคร่ชอบในแง่นี้ เพราะเป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้การขยายกำลังค่อนข้างช้าไป แต่ท่านก็เป็นผู้เห็นการณ์ไกลในด้านการบิน ในทำนองเดียวกันกับความคิดเห็นของนายพลมิทเชลล์ อยู่ก่อนแล้วเหมือนกัน ท่านกล้าเสนอความคิดเห็นอย่างหนักแน่นต่อเสนาธิการทหารบก (นายพลเอก สมเด็จพระเจ้าน้องยาเธอ เจ้าฟ้ากรมหลวงพิษณุโลกประชานาถ ในรัชกาลที่ ๖ หรือเรียกย่อว่า "ทูลกระหม่อมจักรพงษ์") เพื่อจัดกำลังเป็นขั้น ๆ ตามฐานะในทางเศรษฐกิจของชาติ ซึ่งไม่มั่งมีเหมือนสหรัฐฯ และแม้บรรดานายทหารบกชั้นนายพลหลายท่านในสมัยนั้น จะไม่เห็นชอบด้วยบ่อย ๆ ก็ตาม แต่ท่านก็ต้องใช้ความมานะอดทนต่อสู้กับความยุ่งยากต่าง ๆ เสมอมา เช่นของบประมาณแยกเป็นเงินส่วนหนึ่งต่างหาก โดยไม่อยู่ในงบของกองทัพบกดังนี้เป็นต้น ประกอบกับเสนาธิการทหารบกในขณะนั้นทรงเห็นการณ์ไกลในด้านความสำคัญของการบินมาก จึงทรงริเริ่มและสนับสนุนด้วยดีโดยลำดับ ดังนั้นการจัดและการขยายกำลังจึงดำเนินสืบต่อเนื่องกันมาดังนี้.-

๑. เป็น "แผนกการบิน" ขึ้นตรงจเรทหารช่างและเสนาธิการทหารบก (นายพลเอก สมเด็จฯ กรมหลวงพิษณุโลกประชานาถ ต่อมาเป็นจอมพล) เมื่อ พ.ศ. ๒๔๕๖ (๑๙๑๓)-๒๖ มีนาคม ๒๔๕๗ (๑๙๑๔) และมีส่วนขึ้นตรงคือ นักบินและโรงงาน

- นักบิน ๓ นาย ซึ่งสำเร็จการบินจากประเทศฝรั่งเศส เมื่อต้นปี ๒๔๕๖ (๑๙๑๓) ได้แก่ นายพันโท หลวงศักดิ์ศัลยาวุธ (สุณี สุวรรณ ประทีป) นายพันตรี หลวงอาวุธสิขิกร (หลง สินสุข) นายร้อยเอก ทิพย์ เกตุทัต ท่านทั้ง ๓ เป็นครูการบิน และช่างเครื่องด้วย

- ฝึกศิษย์การบิน ๘ นาย ซึ่งมีพลเรือน ๑ นาย และคัดเลือกจากนายทหารบก ๗ นาย และเรียนสำเร็จเป็นนายทหารนักบิน ๕ นาย ส่วนพลเรือนและนายทหาร ๒ นาย ปรากฏว่า ผลการสอบไม่ผ่านเพื่อเป็นนักบินได้ เครื่องบินที่ใช้ทำการฝึกมี เครื่องบินนิเออปอร์ท ๔ เครื่อง และเครื่องบินเบร์เกต์แบบเก่า ๔ เครื่อง

- กองบังคับการและสนามบินตั้งอยู่ที่สนามม้าสระประทุม

๒. เป็น "กองบินทหารบก" ขึ้นตรงต่อจเรทหารช่างและเสนาธิการฯ ดังกล่าวใน ๑. ตั้งแต่ ๒๗ มีนาคม ๒๔๕๗-๑๘ มีนาคม ๒๔๖๑ (๑๙๑๘) ซึ่งมีฐานะเป็นกองบินทหารบกก่อนแผนกบินของสหรัฐฯ ประมาณ ๑๐ ปี และมีส่วนที่ขึ้นตรงคือ-กองบิน-โรงเรียนการบิน-และโรงเรียนการจัดกำลังตอนนี้นับว่าสำคัญมาก

- สร้างเครื่องบินเบร์เกต์แบบเก่าด้วยฝีมือคนไทยและบินทดลองได้ผลดีเมื่อ ๒๔ พฤษภาคม ๒๔๕๙ (๑๙๑๖)

- **๒๗ มีนาคม ๒๔๕๗ เป็นวันที่กระทรวงกลาโหมออกคำสั่งตั้งเป็น "กองบินทหารบก" ซึ่งเริ่มมีกำลังเป็นปึกแผ่นขึ้นแล้ว จึงนับถือวันนี้เป็นวันสถาปนากองทัพอากาศ**

- ที่สระประทุมคับแคบมาก จึงย้ายมาอยู่ดอนเมืองทางพื้นดินเมื่อ ๕ มีนาคม ๒๔๕๗ และเคลื่อนย้ายเครื่องบินทางอากาศ เมื่อ ๘ มีนาคม **๒๔๕๗ ดอนเมืองจึงเป็นที่ตั้งกองบังคับการกองบินฯ และเป็นสนามบินที่ใช้ทำการฝึกบินตั้งแต่นั้นมา**

๓. เป็น **"กรมอากาศยานทหารบก"** ขึ้นตรงต่อเสนาธิการทหารบก (ทูลกระหม่อมจักรพงษ์) ตั้งแต่ ๑๙ มีนาคม ๒๔๖๑-๓๐ พฤศจิกายน ๒๔๖๔ (๑๙๒๑) การจัดกำลังตอนนี้ นับเป็นประวัติศาสตร์สำคัญมากเหมือนกันคือ

- กองบินทหารบกที่ ๑ (ขับไล่)-ที่ ๒ (ตรวจการณ์)-ที่ ๓ (ทิ้งระเบิด) ออกเดินทางไปในงานสงครามเพื่อช่วยฝ่ายสัมพันธมิตร ทำการรบต่อต้านฝ่ายเยอรมัน เมื่อ ๑๙ มิถุนายน ๒๔๖๑ (๑๙๑๘) นี้เป็นโครงการของกองบินใหญ่ ๓ กอง

- โรงเรียนการบินทหารบก เร่งฝึกศิษย์การบินเพิ่มเติม เพื่อให้ได้นักบินมากพอก่อนไปสงครามตามสมควรแก่โอกาส

- ตรวจคัดเลือกนักบินจากเมืองไทยไว้มาก แต่เมื่อถึงฝรั่งเศสแล้วคัดได้ ๑๐๖ คน และสอบสำเร็จเป็นนักบินได้ ๙๕ คน จัดอยู่ในเกณฑ์ชั้นดีเยี่ยม ไม่น้อยหน้านักบินชาติอื่น ๆ ที่ไปฝึกด้วยกัน

- ที่ฝรั่งเศสฝึกสำเร็จเป็นช่างเครื่องได้ ๒๒๕ คน ซึ่งมีนายทหารสัญญาบัตร ๒ นาย ชั้นประทวน ๑๔ คน และพลทหาร ๒๐๙ คน

- นายพันเอก พระยาเฉลิมอากาศ เป็นผู้บังคับกองทหารอาสา ซึ่งมีกองบินทหารบก ๓ กองบินใหญ่ และกองทหารบกรถยนต์ ๑ กอง อยู่ในบังคับบัญชา

- นายพันตรี หลวงทะยานพิฆาต (ทิพย์ เกตุทัต) เป็นผู้บังคับกองบินทหารบก และผู้บังคับกองบินใหญ่ที่ ๓ อีกตำแหน่งหนึ่ง

- กองบินฯ ไม่ทันเข้ารบ เพราะสงครามสงบลง

- ธงไชยเฉลิมพล ได้เหรียญ "ครัว เดอ แกร์" ของฝรั่งเศสประดับเป็นเกียรติยศ

หมายเหตุ

นายพลมิทเชลล์ ได้บินไปตรวจแนวรบฝ่ายข้าศึกเป็นคนแรก และเป็นผู้บังคับหน่วยบินของฝ่ายสัมพันธมิตรในแนวหน้าของแนวรบด้านตะวันตก ส่วนของฝ่ายเรายังไม่ได้เข้าแนวรบ เมื่อสงครามยุติลงมิทเชลล์ ได้นำเรือรบของเยอรมันเป็นเป้าให้เครื่องบินทำการทิ้งระเบิดในปี ๒๔๖๔ (๑๙๒๑)

๔. เป็น **"กรมอากาศยาน"** ขึ้นตรงต่อเสนาธิการทหารบก (จอมพล สมเด็จพระเจ้าน้องยาเธอเจ้าฟ้ากรมพระนครสวรรค์วรพินิต ในรัชกาลที่ ๖) ตั้งแต่ ๑๙ เมษายน ๒๔๖๕ (๑๙๒๒)-เมษายน ๒๔๖๙ (๑๙๒๒) การจัดกำลังเหมือนเลข ๓. ข้างบน และกองโรงงานกรมอากาศยานสร้างเครื่องบินได้เอง ดังนี้.

- พ.ศ. ๒๔๖๕ (๑๙๒๒) สร้างเครื่องบินขับไล่ (นิเออปอร์ต ๑๕ ตรม.) ไว้ใช้ราชการหลายสิบเครื่อง

- พ.ศ. ๒๔๖๖ (๑๙๒๓) สร้างเครื่องบินขับไล่ (สปัดแบบ ๗) ไว้ใช้ราชการไม่น้อยกว่า ๓๐ เครื่อง

- พ.ศ. ๒๔๖๗ (๑๙๒๔) สร้างเครื่องบินขับไล่นิเออปอร์ต เดอลาจ เข้าประจำการเป็นจำนวนมาก เครื่องบินแบบนี้ใช้ไม้อัดหลายชั้น พันทับกันเป็นรูปกรวยกว้างทางหัว ซึ่งวางไม้เป็นโครงสำหรับติดตั้งเครื่องยนต์ ทางหลังเครื่องยนต์เป็นที่นั่งนักบิน ต่อจากนั้นเป็นกรวยเรียวไปทางหางไม่มีแกนลำตัวเลย ภาย

นอกบุด้วยผ้าอัดด้วยกาว ผิวนอกลำตัวทาน้ำมันชักเงาให้ลำตัวลื่น (พูดง่าย ๆ ว่าลำตัวเหมือนเปลือกกุ้งนั่นเอง) น่ากลัวว่าเครื่องยนต์จะหลุดจากลำตัวขณะบิน แต่ไม่ปรากฏเลย เว้นแต่เครื่องหกคะเมนที่พื้นดิน

หมายเหตุ

นายพลมิทเชลล์มาเมืองไทย เมื่อเมษายน ๒๔๖๗ (๑๙๒๔) ขึ้นศาลทหารเมื่อ ๒๘ ตุลาคม ๒๔๖๘ (๑๙๒๕) ลาออกจากราชการเมื่อ ๑ กุมภาพันธ์ ๒๔๖๙ (๑๙๒๖) ถึงแก่กรรมเมื่อ ๒๙ กุมภาพันธ์ ๒๔๗๙ (๑๙๓๖)

๕. เป็น **"กรมอากาศยาน"** (สมัยเปลี่ยนแปลงการปกครองและเกิดกบฏ ๗๖) ขึ้นตรงต่อเสนาบดีกระทรวงกลาโหม (นายพลเอก พระเจ้าวรวงศ์เธอ พระองค์เจ้าบวรเดช) และรัฐมนตรีว่าการกระทรวงกลาโหม (นายพันเอก พระยาพหลพลพยุหเสนา และ นายพันเอกหลวงพิบูลสงคราม) ตั้งแต่ ๑๓ สิงหาคม ๒๔๖๙ (๑๙๒๖)-เมษายน ๒๔๗๘ (๑๙๓๕) การจัดกำลังเกือบไม่มีการเปลี่ยนแปลง นอกจากเปลี่ยนชื่อบางหน่วย กับย้ายกองบินใหญ่ที่ ๑ ไปอยู่ลพบุรี และย้ายโรงงานกรมช่างมาอยู่บางซื่อ เมื่อ ๒๔๗๓ (๑๙๓๐) ส่วนเจ้ากรมอากาศยานนั้นได้แก่ นายพลโท พระยาเฉลิมอากาศ-นายพันเอก พระยาเวหาสยาน-ศิลปสิทธิ์-นายพันเอกพระเวชยันต์รังสฤษฎ์ (ภายหลังการกบฏ ๒๔๗๖ (๑๙๓๓) ซึ่งเป็นลูกหม้อในทางช่างอากาศยานของชาวฟ้าที่ดีเด่นที่สุด และแม้เป็นเหล่าช่วยรบ ท่านก็สามารถเป็นผู้นำของชาวฟ้าฝ่ามรสุมต่าง ๆ มาได้ด้วยดียิ่ง โดยมีนายพันเอก พระศิลปศัตราคม ซึ่งเป็นลูกหม้อฝ่ายยุทธการของกองทัพบกเป็นผู้ช่วย และต่อมาเป็นพลโท พระศิลปศัตราคม (ภักดิ์ เกษสำลี)

หมายเหตุ

ปี ๒๔๗๐ (๑๙๒๗) ออกแบบและสร้าง บ. "บริพัตร" ได้ (โดยพระเวชยันต์ฯ และคนไทยเป็นช่างเป็นครั้งแรก) ด้วยจำนวนมาก และได้ทำการบินไปเพื่อสันถวไมตรีที่นิวเดลี อินเดีย และฮานอยเมืองหลวงของญวนเหนือ

- ปี ๒๔๗๑ (๑๙๒๘) ซื้อเครื่องบินฝึก พี.ที.๑ จากสหรัฐฯ
- ปี ๒๔๗๒ (๑๙๒๙) และ ๒๔๗๓ (๑๙๓๐) ซื้อกรรมสิทธิ์สร้างเครื่องบินแอ๊ฟโร่ ๕๐๔ และสร้างขึ้นเป็นจำนวนมาก
- ปี ๒๔๗๔ (๑๙๓๑) ซื้อเครื่องบินขับไล่-บริสตอล บูลดอก ๒ เครื่อง-โบอิ้ง ๒ เครื่อง-และไฮน์เกลจากเยอรมัน ๑ เครื่อง
- ๒๔ มิถุนายน ๒๔๗๕ (๑๙๓๒) เปลี่ยนการปกครองเป็นระบอบประชาธิปไตย เจ้าคุณพ่อออกจากราชการ เพราะเลิกล้มยศนายพลในตำแหน่งของกองทัพบกทั้งหมด และพระยาเวหาสยานฯ เป็นเจ้ากรมอากาศยาน
- ๑๑ ตุลาคม ๒๔๗๖ (๑๙๓๓) เกิดกบฏเป็นผลให้ **"กรมอากาศยานเกือบสลายตัว"** (ซึ่งข้าพเจ้าเขียนบทความพิเศษ ลงในหนังสือที่ระลึกกองทัพอากาศครบรอบ ๕๐ ปี เมื่อ ๒๗ มีนาคม ๒๕๐๘ (๑๙๖๕) และพระเวชยันต์ฯ เป็นเจ้ากรมแต่นั้นมา
- **สิ่งที่น่าสังเกต** - ๑๑ ตุลาคม ๒๔๗๖-มีนาคม ๒๔๗๖ เป็นระยะที่ยุ่งเหยิงที่สุดของกรมอากาศยานแต่ต่อมาก็ราบรื่นและก้าวหน้าด้วยดีจนถึงปัจจุบัน

๖. เป็น **"กรมทหารอากาศ"** ขึ้นตรงต่อรัฐมนตรีว่าการกระทรวงกลาโหม (นายพลตรีหลวงพิบูล-สงคราม ตั้งแต่ ๑๒ เมษายน ๒๔๗๘ (๑๙๓๕)-๒๔๗๙ นายพันเอกพระเวชยันต์รังสฤษฎ์เป็นเจ้ากรมทหารอากาศ การจัดกำลังเพิ่มเติมกว่าเดิมดังนี้.-

- จัดกำลังรบเป็น ๕ กองบินน้อย

- กองเสนารักษ์

- แผนกสมุห์บัญชี

- สั่งซื้อเครื่องบินคอร์แซร์ ๑ ฝูง ตั้งแต่ปลายปี ๒๔๗๖ และสร้างเครื่องบินแบบนี้ในปี **๒๔๗๘** (๑๙๓๕) จำนวน ๒๕ เครื่อง

๗. เป็น **"กองทัพอากาศ"** ขึ้นตรงต่อรัฐมนตรีว่าการกระทรวงกลาโหม (นายพลอากาศตรีหลวงพิบูลสงคราม, นายนาวาอากาศเอก พระเวชยันต์รังสฤษฎ์ เป็นผู้บัญชาการทหารอากาศ **ตั้งแต่ ๙ เมษายน ๒๔๘๐** (๑๙๓๗), ๒๔๘๑-๒๔๘๒ และ ๒๔๘๒-๒๔๘๔ (๑๙๔๑) การจัดกำลังเพิ่มเติมกว่าเดิมดังนี้.-

- จัดตั้งกรมเสนาธิการ ซึ่งแบ่งเป็น ๔ แผนก

- แหล่งสมาคม (สโมสร)

- ซื้อเครื่องบินขับไล่ ฮ็อก ๒ และฮ็อก ๓ อย่างละ ๑ ฝูง กับสร้างฮ็อก ๓ คราวละ ๒๕ เครื่อง (แบบพับฐาน)

- สร้างเครื่องบินคอร์แซร์อีก ๕๐ เครื่อง

- สร้างเครื่องบินฝึกขั้นกลาง, คอร์แซร์ หัวยาว ๑ ฝูง, ใบพัดไม้, เครื่องยนต์ ๖๐๐ แรงม้า

- ซื้อเครื่องบินทิ้งระเบิดมาร์ติน ๑ ฝูง (ไม่พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว

- ซื้อเครื่องบินขับไล่ ฮ็อก ๗๕ ๑ ฝูง (ไม่พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว

- ซื้อเครื่องบินขับไล่แบบ โอตะ ๑ ฝูง (ไม่พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว

- ซื้อเครื่องบินโจมตี (นาโกย่า) ๒ ฝูง (ไม่พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว

- ซื้อเครื่องบินทิ้งระเบิด (นากาจิม่า) ๑ ฝูง (พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว

- ซื้อเครื่องบินขับไล่ (ฮายาบูซ่า) ๑ ฝูง (พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว

- ซื้อเครื่องบินฝึกขั้นกลาง (ตะจิกาวา) (ไม่พับฐาน) เป็นโลหะทั้งตัว, เครื่องยนต์ ๔๕๐ แรงม้า

- ซื้อเครื่องติดต่อสื่อสาร (แฟร์ไชลด์) ๒ ครั้ง ประมาณ ๑๖ เครื่อง

แม้กล่าวโดยส่วนรวม **กองทัพอากาศสมัยนั้น มีเครื่องบินทันสมัยที่ใช้การได้ไม่น้อยกว่า ๓๐๐ เครื่อง**

สิ่งที่น่าสังเกต

เริ่มแสดงการบินแบบอังกฤษ ครั้งแรกเมื่อ ๑-๒-๓ เมษายน ๒๔๘๑ (๑๙๓๘) และแสดงการบินครั้งที่ ๒ เมื่อ ๓๐ มีนาคม ๒๔๕๕ กับครั้งที่ ๓ เมื่อ ๓๐ มีนาคม ๒๔๙๖ (๑๙๕๓) ได้ผลดีและเป็นที่พอใจของประชาชนมาก

- เกิดกรณีพิพาทกับอินโดจีนของฝรั่งเศส กองทัพอากาศทำการรบได้ชัยชนะทุกด้าน ทำให้กองทัพบกได้ชัยชนะในที่สุด และไทยได้ดินแดนเขมรกับลาวบางส่วนคืนจากฝรั่งเศส เหตุการณ์เริ่มต้นเมื่อ ๒๘ พฤศจิกายน ๒๔๘๓ (๑๙๔๐) โดยฝรั่งเศสมาทิ้งระเบิดที่เมืองนครพนมก่อน เราจึงตีโต้ตอบอย่างรุนแรง

๘. **"กองทัพอากาศ"** ตั้งแต่ ๒๔๘๔ (๑๙๔๑)-๒๔๙๐ (๑๙๔๗) ขึ้นตรงต่อรัฐมนตรีว่าการกระทรวงกลาโหม ซึ่งรัฐมนตรีฯ เปลี่ยนแปลงไปตามวิถีแห่งการเมือง รวมประมาณ ๓-๔ ท่าน เนื่องด้วย ฯพณฯ จอมพลอากาศ ป.พิบูลสงคราม แพ้คะแนนโหวตในสภาผู้แทนฯ ๒ ครั้งในเดือนเดียวกัน คือร่างพระราชบัญญัติอนุมัติพระราชกำหนดระเบียบราชการบริหารนครบาลเพชรบุรี และร่างพระราชบัญญัติอนุมัติพระราชกำหนดสร้างพระพุทธมณฑล ต้องเลิกล้มไปเมื่อ ๒๐ และ ๒๒ กรกฎาคม ๒๔๘๗ (๑๙๔๔)

โดยลำดับ ฯพณฯ จอมพลอากาศ ป.ฯ จึงกราบถวายบังคมทูลลาออกจากนายกฯ และรัฐมนตรีฯ ตามวิถีแห่งรัฐธรรมนูญ ส่วนผู้บัญชาการทหารอากาศมี ๒ ท่าน คือ พลอากาศตรี หลวงอธึกเทวเดช (เจียม โกมลมิศร์) และ พลอากาศตรี หลวงเทวฤทธิ์พันลึก (กาพย์ ทัตตานนท์) ต่อมาเป็นพลอากาศโท การจัดกำลัง มีแผนกสื่อสารเพิ่มขึ้น ซึ่งขึ้นตรงต่อกรมเสนาธิการฯ ส่วน บน.๖ แผนกโยธาพาหนะ, แผนกพลาธิการ, กองการบินพลเรือน และกองดุริยางค์ ก็เพิ่มขึ้น ซึ่งขึ้นตรงต่อกองทัพฯ และมีเหตุการณ์ที่เกี่ยวแก่ชีวิตการต่อสู้ที่หนักที่สุดดังนี้

- เช้า ๘ ธันวาคม ๒๔๘๔ (๑๙๔๑) ซึ่งเป็นวันเดียวกันที่กองทัพญี่ปุ่น บุกฟิลิปปินส์ และโจมตีเพิลฮาร์เบอร์นั้น ฝูงบินวัฒนานคร, ปราจีนบุรี, ได้ถูกข้าศึกโจมตีทางอากาศเสียหายมากถึงขั้นอัมพาต, บน.๕, ประจวบคีรีขันธ์, ถูกข้าศึกยกพลขึ้นบกทั้ง ๒ อ่าว ด้วยกำลังประมาณ ๑ กรม หน่วยป้องกันของ บน.๕ ส่วนที่เหลือประจำถิ่น มีกำลังประมาณ ๑๒๐ คน ได้ต่อสู้ข้าศึกถึง ๓๖ ชั่วโมง ยังไม่แพ้-ชนะกัน ก็ต้องสงบศึกตามคำสั่งรัฐบาล ปรากฏว่าข้าศึกเสียหายมากกว่าฝ่ายเราถึง ๑๐ เท่า กองทหารบกที่นครศรีธรรมราช ก็ถูกตีหนักเหมือนกัน ส่วนที่สงขลา, เครื่องบิน ๑ หมวด เสียหายยับเยิน แต่ทหารบกไทย ๑ กรม ต่อสู้กับข้าศึกซึ่งมีกำลังเหนือกว่า ๔-๕ เท่าเป็นเวลานานเช่นเดียวกับที่ บน.๕ เหมือนกัน ไทยเสียหาย ๑ ต่อ ๔ ทำให้ข้าศึกทราบกำลังใจของทหารไทย แต่ก็ยังยื่นคำขาด ขอให้ไทยยอมจำนนแต่โดยดีและร่วมมือเป็นสัมพันธมิตร ซึ่งมีหน้าที่ขับไล่กองทัพจีนให้พ้นไปจากรัฐฉานเพื่อป้องกันปีกขวาของกองทัพญี่ปุ่นในประเทศพม่า ในที่สุดรัฐบาลจอมพล ป.พิบูลสงคราม เห็นว่าถ้าขืนสู้ต่อไป ก็คงไม่มีทางเอาชนะญี่ปุ่นได้ จึงยอมรับสัญญาร่วมรบรุกกับญี่ปุ่น เพื่อจะได้ไม่ถูกปลดอาวุธและข้อสำคัญไม่เสียเอกราช ปัญหาอื่น ๆ ไว้แก้กันในภายหลัง ผลสุดท้ายกองทัพไทยซึ่งมีกองทัพอากาศช่วยเหลือด้วยดี ก็สามารถขับไล่กองทัพจีนพ้นไปจากรัฐฉาน และกองทัพไทยยังมีกำลังเหลือไว้ต่อต้านญี่ปุ่นตามแผน ที่ ฯพณฯ จอมพล ป. กำหนดไว้ทุกประการ แต่เหตุการณ์ได้เปลี่ยนแปลงไป ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น (รัฐบาลลาออก)

- ฯพณฯ จอมพล ป.ฯ ลาออกจากตำแหน่งฯ ในปลายเดือนกรกฎาคม ๒๔๘๗ และประมาณกลางเดือนสิงหาคม ๒๔๘๘ (๑๙๔๕) ญี่ปุ่นยอมแพ้โดยปราศจากเงื่อนไข และกองทัพอังกฤษเข้ามาปลดอาวุธฝ่ายญี่ปุ่นในประเทศไทย

- เศรษฐกิจตกต่ำ ยุบกรมกองทหาร และมีคำสั่งปลดผู้บังคับบัญชาทหารในระหว่างเดินทางกลับเข้าที่ตั้งเดิม ทั้ง ๆ ที่เขาไปรบได้ชัยชนะ ทำให้นายทหารเสียขวัญ และทหารเสียวินัย และพลเมืองก็ยากจนเกิดโจรผู้ร้ายชุกชุม **ในที่สุดเป็นสาเหตุหนึ่งที่นำไปสู่การรัฐประหารเมื่อ ๘ พฤศจิกายน ๒๔๙๐**

- เนื่องจากพลอากาศตรี หลวงเทวฤทธิ์ฯ ผู้บัญชาการทหารอากาศ ตั้งแต่ ๒๔๘๖ เป็นหัวหน้าเสรีไทยฝ่ายทหารอากาศ ในต่อมาจึงทำให้กองทัพอากาศปลดคนน้อยลง เพียงร้อยละ ๕-๑๐ เท่านั้น คนที่ถูกปลดโดยมากมักได้แก่พวกที่มีความประพฤติไม่ดีจริง ๆ หรือหย่อนความสามารถมาก แต่มีนายทหารแพทย์ ขอลาออกไม่น้อยกว่า ๑๐ นาย ดังนั้น ต่อมาต้องขอร้องให้ระงับการลาออกไว้ มิฉะนั้น จะไม่มีนายแพทย์ชั้นปริญญาเหลืออยู่เลย และมีนายทหารชั้นดีหนึ่งบางท่านยอมเสียสละลาออก เช่น นาวาอากาศเอกหม่อมเจ้ารังษิยากร อาภากร รองผู้บังคับกองบินใหญ่ผสมภาคพายัพ ขอลาออก ผู้บัญชาการทหารอากาศ ขอยับยั้ง แต่ท่านไม่ทราบยินยอมขอลาออกให้จงได้ โดยอ้างว่าเพื่อช่วยเหลือผู้อื่น ทั้ง ๆ ที่ทางราชการยังมีงานให้ท่านช่วยทำอีกมาก ในที่สุดผู้เขียนไปขอร้อง และยึดใบลาไว้ ท่านรังษ์ฯ ก็ไม่ทรงยินยอมอีกเช่นเดียวกัน และรับสั่งว่า **"ท่านจอมพล ป.ฯ พร้อมกับบริวาร ซึ่งรวมทั้งท่านรองฯ (หมายถึงข้าพเจ้า) จะเป็นอาชญากรสงครามในไม่ช้านี้แล้ว เราทำดีแต่กลับเป็นเสียจะอยู่ไปทำไม"** แล้วท่านก็รีบกลับไปโดยไม่ฟังเหตุผลอะไรทั้งนั้น

- ฯพณฯ จอมพล ป.กับพวกหลายท่าน ถูกควบคุมตัวในฐานะเป็นอาชญากรสงครามเป็นรุ่นที่ ๑ เป็นเวลาหลายเดือน ต่อมาศาลไทยในขณะนั้น ได้สอบสวนและพิจารณาโดยละเอียดแล้วเห็นว่ากฎหมายอาชญากรสงคราม เป็นกฎหมายพิเศษที่ให้พิจารณาความผิดย้อนหลัง อันเป็นการขัดต่อรัฐธรรมนูญ แห่งราชอาณาจักรไทย จึงเป็นโมฆะ ดังนั้นจึงพิพากษาให้ปล่อยผู้ต้องหาดั่งกล่าวพ้นข้อหาไปเป็นผลให้ไม่มีผู้ต้องหาในรุ่นต่อไปอีก ทั้งนี้ด้วยบารมีคุณพระศรีรัตนตรัยคุ้มครองโดยแท้

- ชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้าต้องพลอยเดือดร้อนในความเป็นอยู่ที่ขาดแคลนในเครื่องอุปโภคและบริโภคอย่างแสนสาหัส เช่นพลเมืองทั่วไปเหมือนกัน คือต้องประหยัดเพื่อความอยู่รอดเป็นเวลาแรมปีทีเดียว

๙. **"กองทัพอากาศ"** ตั้งแต่ ๒๔๙๑ (๑๙๔๘)-๒๕๐๐ (๑๙๕๗) และเฉพาะอย่างยิ่งในสมัย ฯพณฯ จอมพลอากาศ ป.พิบูลสงคราม เป็นนายกรัฐมนตรี ครั้งที่ ๕-๖-๗-๘ ชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า ได้เจริญก้าวหน้าเช่นเดียวกับกองทัพบกและเรือเหมือนกัน กล่าวคือมีการจัดกำลังอย่างกองทัพอากาศสมัยใหม่เหมาะสมสำหรับป้องกันประเทศด้วยดีทั้งจำนวนและคุณภาพ ตั้งแต่ปี ๒๔๙๔ (๑๙๕๑) เป็นต้นมา เพราะได้รับการช่วยเหลือทางทหารจากสหรัฐฯ และมีเหตุการณ์สำคัญดังนี้

- **ซื้อเครื่องบินฝึกชิปมังค ๒ ครั้ง ๆ แรก ๒๐ เครื่อง ครั้งที่ ๒ จำนวน ๒๕ เครื่อง เป็นโลหะทั้งตัว ใช้ฝึกบินจนถึงปัจจุบัน**

- **ซื้อเครื่องบินฝึกขั้นกลาง** (ที.๖) ๒๐ เครื่อง และซื้อเครื่องอะไหล่มาปรับปรุงเองอีก ๑ ฝูง ต่อมาได้รับการช่วยเหลือจากสหรัฐฯ เป็นจำนวนมาก, พับฐาน, เป็นโลหะทั้งตัว, **ยังใช้ในปัจจุบัน**

- ซื้อเครื่องเฮลิค๊อปเตอร์ จำนวนมาก

- **องค์การสหประชาชาติ** ลงมติประกาศขอให้บรรดานานาชาติ ส่งทหารไปป้องกันการรุกรานของฝ่ายคอมมิวนิสต์จากเกาหลีเหนือ ซึ่งรุกเข้าตีเกาหลีใต้ **ไทยเป็นประเทศแรกที่แจ้งให้องค์การสประชาชาติทราบว่า "ยินดีส่งทหารไปร่วมรบ"**

- สำหรับกองทัพอากาศ ส่งหน่วยบินลำเลียงรุ่นแรกซึ่งมีเครื่องบิน ซี.๔๗ จำนวน ๓ เครื่อง, นายทหารสัญญาบัตร ๑๔ นาย, พันจ่าและจ่าอากาศ ๖ นาย ได้ออกบินเดินทางจากประเทศไทยเมื่อ ๘ มิถุนายน ๒๔๙๔ (๑๙๕๑) ไปเข้าที่เตรียมพร้อมที่ ตาชิกาวา, ประเทศญี่ปุ่น เพื่อรอรับคำสั่งต่อไป และมีรุ่นต่าง ๆ ผลัดเปลี่ยนกันไปทการตามหน้าที่อยู่จนถึงปัจจุบันนี้ นอกจากนั้นก็มีนายทหารติดต่อฝ่าย ทอ. ประจำ บก.สหประชาชาติ และหน่วยพยาบาลทางอากาศกับหน่วยศัลยกรรมเคลื่อนที่ ซึ่งส่งไปช่วยเป็นครั้งคราวตามความจำเป็น

- ได้รับความช่วยเหลือทางทหารจากสหรัฐฯ ตั้งแต่ **๒๔๙๔-ปัจจุบัน ซึ่งเหลือน้อยมาก จึงเป็นเรื่องที่น่าวิตก และน่าจะต้องเตรียมแผนการณ์ไว้เพื่อต่อสู้กับความขาดแคลนในสิ่งต่าง ๆ เป็นอันดับแรกทีเดียว**

- ประเทศไทยร่วมจัดตั้ง องค์การสนธิสัญญาป้องกันร่วมกันแห่งเอเซียตะวันออกเฉียงใต้ ซึ่งเรียกชื่อย่อว่า **"สปอ."** ส่วนภาษาต่างประเทศเรียกว่า **"ซีโต้"** (SEATO) ตั้งแต่ **๒๔๙๗ (๑๙๕๔)** ดังนั้นจึงต้องวางแผน และมีการฝึกร่วมกันเพื่อประสิทธิภาพในมาตราฐานการฝึกบนรากฐานอันเดียวกันไว้ สำหรับต่อต้านผู้รุกราน การฝึกนี้มีขึ้นตั้งแต่ **๒๔๙๙ (๑๙๕๖)** ซึ่งกองทัพอากาศมักจัดกำลังเข้าร่วมการฝึกด้วยเสมอมาจนบัดนี้ประมาณ ๔๑ ครั้ง แต่ในระยะหลังนี้มีประเทศที่ไม่เข้าร่วมฝึกซึ่งได้แก่ ปากีสถาน และฝรั่งเศส ส่วนที่เหลือมี ๖ ชาติ คือ ออสเตรเลีย, นิวซีแลนด์, ฟิลิปปินส์, ไทย, อังกฤษ และสหรัฐฯ หน้าที่สำคัญขององค์การฯ นี้ กำลังเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม คือจะร่วมมือช่วยเหลือในทางเศรษฐกิจเพียงอย่างเดียว? **จึงเป็นเรื่องที่ต้องคอยดูกันต่อไปว่า องค์การฯ นี้จะสลายตัวไปเองเมื่อใด?**

- ก่อนปี ๒๕๐๐ (๑๙๕๗) ทหารอากาศ หรือชาวฟ้า ได้ระลึกถึงท่านผู้มีพระคุณแก่สถาบันการบินแห่งประเทศไทย ถึงขนาดเชิดชูไว้เป็น "บุพการี" หรือเป็น "บรรพบุรุษ" ของทหารอากาศขึ้นไว้เป็นอนุสาวรีย์ที่สักการะ และเป็นที่เตือนใจอนุชนให้เห็นความสำคัญในการประกอบ**คุณงามความดีเด่นที่เป็นประโยชน์แก่ส่วนรวมสืบไปในกาลข้างหน้า** เมื่อคณะกรรมการของกองทัพอากาศได้พิจารณาอย่างรอบคอบแล้วจึงเห็นว่า จอมพลสมเด็จฯ เจ้าฟ้ากรมหลวงพิษณุโลกประชานาถเป็นผู้สมควรได้รับเทอดทูนว่าเป็น "บุพการี แห่งกองทัพอากาศ" และพลอากาศโท พระยาเฉลิมอากาศ, นาวาอากาศเอก พระยาเวหาสยาน-ศิลปสิทธิ์ กับนาวาอากาศเอก พระยาทะยานพิฆาต ทั้ง ๓ ท่านนี้เป็นผู้สมควรเชิดชูว่าเป็น "บรรพบุรุษแห่งทหารอากาศ" เพราะทั้ง ๔ ท่านนี้ เป็นผู้ดำริริเริ่ม และดำเนินการก่อตั้งรากฐานสถาบันมาด้วยความมานะอดทน จนเจริญรุ่งเรืองเป็นกองทัพอากาศ ซึ่งมีอายุครบ ๖๐ ปีบริบูรณ์ในปีนี้. "อนุสาวรีย์องค์บุพการี" ได้ตั้งไว้ที่หน้ากรมการบินพลเรือนแห่งหนึ่ง และ "อนุสาวรีย์สามบรรพบุรุษ" ได้ตั้งไว้ที่สนามกีฬากองทัพอากาศอีกแห่งหนึ่ง อนุสาวรีย์ของผู้อุปการะทั้ง ๔ ท่าน สร้างสำเร็จภายในเวลา ๒ ปี และเปิดได้ทันวันสำคัญพร้อมกันคือ วันที่ ๒๗ มีนาคม ๒๕๐๐ ซึ่งเป็นวันคล้ายวันสถาปนากองทัพอากาศ และปีที่ ๒๕ แห่งพุทธศตวรรษ นับว่าเป็น "มงคลฤกษ์" อันสูงยิ่ง ฉะนั้น ชาวกองทัพอากาศ จึงถือเป็นวันที่ระลึกสำคัญ ต่างนำดอกไม้ธูปเทียนไปแสดงความกตัญญู-กตเวทีด้วยความเคารพรักแต่นั้นมา

สรุปการเปรียบเทียบชีวิตการต่อสู้ของชาวฟ้า

ตามที่กล่าวมาแล้วจะเห็นว่าตัวบุคคลที่ได้ช่วยกัน ฟันฝ่าอุปสรรค แผ้วถางความก้าวหน้าโดยตลอดตั้งแต่ต้นมา และในบางยุคบางสมัย ก็ต้องออกแรง ออกกำลังใช้สติปัญญาต่อสู้เพื่อให้ได้มา ซึ่งสิ่งที่บางโอกาสเราเรียกว่า "ความอยู่รอด" แต่ในบางโอกาสเราเรียกว่า "เพื่อความก้าวไปข้างหน้าของชาวฟ้าทั้งหลาย"

เกี่ยวกับตัวบุคคลชั้นบริหาร นับตั้งแต่**ท่านบรรพบุรุษทั้งสาม และองค์บุพการี** ซึ่งพวกเราได้พากันยกย่องเชิดชูประกาศเกียรติคุณ และจัดสร้างอนุสาวรีย์ไว้เป็นประจักษ์พยาน แต่อนุชนชาวฟ้าต่อ ๆ มาแล้วนั้น ในความรู้สึกของข้าพเจ้า เห็นว่ายังมีผู้นำทางทหาร และผู้นำทางการเมืองที่สามารถบันดาลความเจริญให้แก่ชาวฟ้า ที่ควรได้รับการกล่าวถึงด้วยความชื่นชมยินดี ต่อผลงานที่ท่านได้มอบเป็นมรดกตกทอดไว้ให้แก่ชาวฟ้าทั้งหลาย น่าจะมีอีกหลายท่านด้วยกัน ซึ่งล้วนแต่ได้ช่วยกันสร้างสรรกองทัพอากาศ ให้ก้าวหน้าโดยลำดับสืบต่อกันมา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง คือ

- ฯพณฯ จอมพล ป.พิบูลสงคราม ในฐานะผู้นำทางทหารและผู้นำทางการเมืองในยุคที่สถาบันชาวฟ้า สั่นสะเทือนด้วยความเปลี่ยนแปลงทางการเมือง

- ฯพณฯ พลอากาศโท มุนี มหาสันทนะ เวชยันตรังสฤษฎ์ ในฐานะผู้บังคับบัญชาชั้นบริหารสูงสุดของชาวฟ้า **ในยุคที่กองทัพอากาศเกือบจะถึงจุดสลายตัว**

ทั้งสองท่านที่กล่าวอ้างมานั้น **โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ฯพณฯ จอมพล ป.พิบูลสงคราม ได้มองเห็นการณ์ไกล แม้เหล่าชาวฟ้าจะไม่เรียกร้อง ไม่มีการต่อสู้ แต่ท่านก็ให้ความสนับสนุนทุกวิถีทาง รวมทั้งช่วยจัดสรร งบประมาณให้อย่างเพียงพอ** ในสมัยที่ท่านเป็นผู้นำทั้งทางด้านการทหารและผู้นำทางการเมือง **เครื่องบินชนิดใหม่ ๆ ได้รับเพิ่มขึ้นเป็นฝูง ๆ** ในแต่ละปี ซึ่งถ้าขาดการสนับสนุนแล้วกองทัพอากาศจะก้าวหน้าได้ช้ากว่าที่เป็นอยู่ในขณะนี้อย่างแน่นอน

สำหรับ **ฯพณฯ พลอากาศโท** มุนี มหาสันทนะ เวชยันตรังสฤษฎ์ ท่านเป็นผู้บังคับบัญชาชั้นสูงสุดของชาวฟ้า **บริหารงานในระยะหัวเลี้ยวหัวต่อที่ชาวฟ้ากำลังระส่ำระสาย** กำลังตกอยู่ในเส้นเขตแดนของอันตรายอย่างยิ่ง **แม้ท่านจะมิใช่เหล่าพลรบ แต่ท่านก็ใช้ความสามารถอย่างดีเยี่ยมของท่าน** นำเหล่า

ชาวฟ้า ผ่านสมรสุมและเกาะแก่ง พ้นจากภัยอันตราย จนก้าวหน้ามาโดยลำดับเป็นพื้นฐานให้มีความก้าวหน้าเท่าที่เป็นอยู่ในปัจจุบันนี้

เนื่องในโอกาส ที่กองทัพอากาศซึ่งเป็นสถาบันของชาวฟ้าทุกระดับชั้น ได้วิวัฒนาการมาด้วยดีจนครบวาระ ๖๐ ปีในวันนี้ ข้าพเจ้าขออัญเชิญสิ่งศักดิ์สิทธิ์ทั้งหลาย ได้โปรดดลบันดาลให้ท่านผู้มีพระคุณต่อกองทัพอากาศทุก ๆ ท่าน นับตั้งแต่ท่านบรรพบุรุษ และองค์บุพการี ตลอดจนท่านผู้มีพระคุณ และบรรดาวีระบุรุษของชาวฟ้า ที่ล่วงลับไปแล้วทุก ๆ ท่าน จงสถิตย์สถาพร ณ สุคติโลกสวรรค์ ส่วนผู้ที่มีพระคุณ ที่ยังมีชีวิตอยู่ ก็ขอให้มีความเจริญก้าวหน้าในทุกวิถีทางโดยทั่วกัน เพื่อเป็นแรงผลักดันให้ชาวฟ้าทั้งหลายในปัจจุบัน ได้มีกำลังกล้าแข็งช่วยกันสร้างสรรกองทัพอากาศให้ก้าวหน้าด้วยดียิ่ง ๆ ขึ้นไปตลอดกาลนิรันดร เทอญ.

จอมพลอากาศ

(ฟื้น รณนภากาศ ฤทธาคนี)

๒ ซอยประชาอุทิศ ถนนปฏิพัทธ์ กรุงเทพฯ

๒๗ มีนาคม ๒๕๑๘

GUIDED MISSILE

ท่านผู้เขียนเรื่องนี้เป็นอาจารย์ประจำโรงเรียนนายเรืออากาศ ได้รับปริญญาตรีทางวิทยาศาสตร์จากโรงเรียนเทคนิคทหารบก รุ่น ๑๑ ต่อมาได้รับปริญญาโททางวิศวกรรมช่างอากาศสาขา AERODYNAMICS จากมหาวิทยาลัยวอชิงตัน เมื่อปี ๒๔๙๖ และได้รับปริญญาโททางวิศวกรรมช่างอากาศสาขา INSTRUMENTATION AND CONTROL จากสถาบันทางเทคนิคมลรัฐแมสซาจูเสทซ์ เมื่อปี ๒๔๙๗ ท่านได้เป็นผู้หนึ่งที่ร่างหลักสูตรการศึกษาของโรงเรียนนายเรืออากาศขึ้น เคยได้รับตำแหน่งเป็นหัวหน้ากองวิชาวิทยาศาสตร์, วิชาเทคนิคมาแล้ว ปัจจุบันดำรงตำแหน่งเป็นหัวหน้ากองวิชาคณิตศาสตร์ กองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศ ได้เป็นอาจารย์บรรยายวิชา CONTROL AND GUIDANCE SYSTEM, CONTROL SYSTEM DYNAMICS, WEAPON SYSTEM, GYROKINETICS ADVANCED MATHEMATICS และวิชาเทคนิคอื่น ๆ อีกหลายวิชา

นท.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี

ปัจจุบันนี้ เรามักจะได้ยินเรื่องที่เกี่ยวกับ MISSILE กันจากวิทยุ, โทรทัศน์ และทางข่าวหนังสือพิมพ์เกือบทุกวัน ความจริงคำว่า "MISSILE" นี้ ไม่ใช่คำใหม่เลย MISSILE แปลว่า อาวุธยิง, อาวุธปล่อย หรืออาวุธส่งก็ได้ แล้วแต่ความหมายในที่จะใช้นั้น ๆ นานมาแล้วมนุษย์เราได้รู้จักใช้ก้อนอิฐขว้างปา, ทุ่ม เพื่อหาอาหารหรือเพื่อการสู้รบ ก้อนอิฐก็จัดว่าเป็น MISSILE ชนิดหนึ่งซึ่งหมายถึงอาวุธยิงหรือขว้างปาไปให้ถูกที่หมาย ความเจริญทางวิทยาศาสตร์ รวมกับความต้องการทางด้านทหาร ทำให้เยอรมันได้ค้นคว้าออกแบบผลิตอาวุธยิง V—1 และ V—2 ขึ้นมาใช้ยิงเป้าหมายในระยะไกลเกินที่ปืนใหญ่จะยิงถึงได้ ตั้งแต่นั้นมาการช่างของอาวุธยิงก็ได้เริ่มและเจริญขึ้นเป็นลำดับมาจนกระทั่งปัจจุบัน-นี้

เมื่อ 2-3 ปีที่แล้วมา มีเด็กคนหนึ่งเขียนจดหมายไปถึง DR. WERNHER VON RAUN วิศวกรผู้ออกแบบของสหรัฐว่า "ทำอย่างไรเขาจึงจะได้เป็น MISSILE EXPERT บ้าง ?" VON BRAUN ได้ตอบด้วยการมอันคมคายเช่นเคยของท่านว่า "ไม่มีสัตว์ประหลาดชนิดอย่างนั้นดอก ถ้าหนูอยากจะรู้เรื่องเกี่ยวกับอาวุธยิงบ้างละก็ ควรพยายามสนใจเรียนวิชาคำนวณและ พีสิคส์ให้แข็งไว้แต่เนิน ๆ" ที่ท่านกล่าวไว้อย่างนี้ ก็เพราะเมื่อตอนหนุ่ม ๆ ท่านไปเปิดตำราว่าด้วยจรวดของ PROFESSOR HERMANN OBERTH (FATHER OF GERMAN ROCKET) เข้า ท่านได้บอกว่ามีแต่ตัวยึกยือทั้งนั้น ด้วยความสนใจในการเดินอวกาศทำให้ท่านกลับไปขมักเขม้นศึกษาวิชาคำนวนและพีสิคส์ ใน สถาบัน ทาง เทคนิค ที่กรุง BERLIN และก็ ก้าวหน้า เรื่อยไป จนตราบเท่า ทุกวันนี้ ปัจจุบัน ท่านได้เป็นวิศวกรหัวหน้ากองวิ-เคราะห์และวิจัยขีปอาวุธของ ทบ. สหรัฐ ได้เป็น หัว เรี่ยว หัว แรงใน การ ออกแบบ จรวด REDSTONE JUPITER-C ซึ่งยิงดาวเทียมดวงแรกของโลกเสรีเมื่อวันที่ 31 มกราคม 2501

ในการออกแบบจรวด V—2 นี้เอง มีความจำเป็นที่จะต้องเริ่มใช้ SYSTEM CONCEPT อย่างจริงจัง ทั้งนี้ก็เพราะว่าจรวด V—2 ไม่มีเจ้าหน้าที่ คอยปรับปรุง และแก้ไข ติดตามไปด้วย ทุกสิ่งทุกอย่างต้องดำเนินไปอย่างถูกต้องและอัตโนมัติ (AUTOMATIC CONTROL) ซึ่งชิ้น ประกอบ ทุกชิ้นส่วน จะต้อง ประ สานงานกันเป็นระบบอย่างยอดเยี่ยม ท่านนายพล DR. DORNBERGER ผู้บังคับบัญชาของ DR. WERNHER VON BRAUN ในเยอรมันต้องคอยประสานงานกันอยู่เสมอ ๆ เพราะได้มีการถกเถียงกันมากมาย ระหว่างวิศวกรฝ่ายควบคุมระบบการนำวิถี(GUIDANCE ENGINEER) นายช่างอากาศพลศาสตร์ (AERODYNAMICS PIONEERS) และ นาย ช่าง อิ เล็ก ตรอ นิคส์ (ELECTRONICS ENGINEER) ตลอดจนบรรดาวิศวกรฝ่ายเทคนิคและนักวิทยาศาสตร์ผู้เกี่ยว

ข้องอีกหลายๆคน ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น ทั้งนี้ก็เพราะการสร้างอาวุธยิง(MISSILE)นั้นเป็นงานของชาติที่ต้องอาศัยวิศวกรหลายสาขาเข้ามาทำงานร่วมกัน เปรียบเสมือนกับวงดนตรีวงใหญ่วงหนึ่งทีเดียว โดยลักษณะทางเทค-นิคของอาวุธยิงนี้เอง จึงทำให้ต้องศึกษาให้ลึกซึ้งและกว้างขวางถึงชิ้นส่วนต่าง ๆ ตลอดจนปฏิกิริยา (REACTION) อันจะเกิดขึ้นระหว่างชิ้นส่วนต่าง ๆ เหล่านั้นด้วย ซึ่งชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่จัดว่าสำคัญ ๆ ของอาวุธยิงก็คือ

๑. ระบบโครงสร้าง (STRUCTURE SYSTEM) เพื่อ**บรรทุก** (LOAD) ส่วนอื่น ๆ
๒. ระบบขับเคลื่อน (PROPULSION SYSTEM) ที่จะให้อาวุธยิง**เคลื่อนที่**ไปได้ด้วยความเร็วสูง
๓. ระบบควบคุมและการนำวิถี (CONTROL AND GUIDANCE SYSTEM) เพื่อที่จะให้อาวุธยิง**เปลี่ยน**ทิศทาง และวิถีให้วิ่งไปหาเป้าหมายได้ ตามความต้องการ และ
๔. ระบบหัวรบ (WAR-HEAD SYSTEM) เพื่อที่จะให้มีอำนาจ**ทำลาย**เป้าหมายได้ตามความต้องการอีกเช่นกัน

นอกจากนั้นก็มีระบบฐานยิง(LAUNCHING SYSTEM) ระบบ สนับ สนุน ทาง ภาค พื้นดิน (GROUND SUPPORT SYSTEM) ระบบโทรมิติ (TELEMETRY) อีกซึ่งจะรวมกันเป็นระบบอาวุธยิงได้ และจำเป็นที่จะต้องมีการวิจัยปฏิบัติการ (OPERATION RESEARCH) เพื่อศึกษาถึงการวิเคราะห์ การใช้งานของอาวุธยิงให้ได้ตามความมุ่งหมายของผู้ที่จะใช้งานในด้านนี้อีกด้วย

ด้วย เหตุผลต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าว มาแล้ว ทำให้วิศวกรด้าน อาวุธยิงต้อง มีรากฐาน ทางคำนวนและฟิสิคส์ให้ดีเสียก่อน ทั้งนี้ก็เพราะว่าวิทยา ศาสตร์ ในด้าน วิศวกรรม ทุกสาขา ก็เป็นเช่นนั้น นอกจากนี้แล้วยังต้องควรจะศึกษาถึง ELASTICITY, THEORY OF STRUCTURE ตลอดจน DYNAMICS OF STRUCTURE ด้วย เพราะว่า อาวุธ ยิงมี ภาระ กรรม สูงจาก อัตราเร่ง (ACCELERATION) อัตราหน่วง (RETARDATION) ของการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง

วิชาที่ควรจะได้ศึกษาร่วมกันก็คือ THERMODYNAMICS, COMBUSTION และ AEROTHERMOCHEMISTRY เพื่อที่จะได้เข้าใจถึงพลังงานความร้อน การเผาไหม้ในเครื่องยนต์จรวด (JET ENGINE CONBUSTION CHAMBER) ตลอดจนกระบวนทางการเคมี (CHEMICAL PROCESS) ในเครื่องยนต์ขับเคลื่อนต่าง ๆ ขั้นต่อไปก็เป็นการศึกษาถึงระบบขับเคลื่อนต่าง ๆ มี INTERNAL BALLISTICS, EXTERNAL BALLISTICS ตลอดจน MAGNETO FLUID MECHANICS เพราะว่าเมื่ออาวุธยิงมีอัตราความเร็วสูงนั้น โดยการเสียดสี กับบรรยา กาศจะทำให้ เกิดความ-ร้อนขึ้น จนบรรยากาศแตกตัวออกเป็นละ-ออง (ION) ไฟฟ้า และจะมีสนามแม่เหล็ก

(MAGNETIC FIELD) มาเกิดร่วมกับการไหลของบรรยากาศซึ่งก็ต้องพิจารณาด้วย นอกจาก นั้นแล้ว เราอาจใช้ สนามแม่ เหล็กไฟฟ้าเพิ่มแรงขับของเครื่องยนต์จรวด (ROCKET MOTOR) ได้อีกด้วย และยิ่งขึ้นไปกว่านี้อีกเราก็ควรจะได้ ศึกษาถึง ระบบขับเคลื่อนด้วยพลังงานนิวเคลียร์ (NUCLEAR ENERGY) พลังงาน THERMONUCLEAR และพลังงานจากดวงอาทิตย์อีกด้วย

นอกจากระบบขับเคลื่อนแล้ว เราก็ต้องหันมาทาง ระบบควบคุม และ การนำ วิถีด้วยซึ่งจะทำให้เราต้องศึกษาถึง MECHANICS OF FLIGHT ซึ่งในถิ่นที่มีบรรยากาศเราก็ต้องเรียน FLUID MECHANICS, AERODYNAMICS,GAS DYNAMICS และ HYPERSONIC FLOW THEORY ซึ่งเพื่อว่า จะได้ ศึกษาถึงแรง ของบรรยา กาศในตอนล่างต่ออาวุธยิงและต่อพื้นบังคับทางอากาศพลศาสตร์ เพื่อจะช่วยให้อาวุธยิงเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่ได้ การเคลื่อนที่ของอาวุธยิงนั้นเราจะให้เข้าใจดีขึ้นก็ต้องไปศึกษาเกี่ยวกับ FLIGHT DYNAMICS และ TRAJECTORY ANALYSIS ทั้งในบรรยากาศ (ATMOSPHERE) และนอกบรรยากาศ (SPACE) ซึ่งในตอนนี้การควบคุมนำวิถีจะต้องใช้ระบบเฉื่อย (INERTIAL GUIDANCE SYSTEM) และระบบปฏิกิริยาไอพ่น (JET REACTION SYSTEM) ร่วมกับวิทยุ, เรดาร์ต่าง ๆ ตามวิชา RADAR PRINCIPLE, RADAR CIRCUITRY, SPACE COMMUNICATION, GUIDANCE THEORY ต่าง ๆ ตลอดจน CONTROL SYSTEM ENGINEERING และ ELECTRONICS ANALOG COMPUTERS ด้วย

ครั้นเมื่ออาวุธยิง เคลื่อนที่ไป สู่เป้าหมายได้แล้ว ก็ต้องมีหัวรบให้ทำลายเป้าหมายได้ ฉะนั้นเราก็ต้องศึกษาถึง EXPLOSIVE, FUZING SYSTEM, WAR-HEAD SYSTEM ต่าง ๆ ตลอดจน OPERATION ANALYSIS เพื่อวิเคราะห์การใช้งานการปฏิบัติการของอาวุธยิงว่า จะเกิดผลเป็นอย่างไร ? มีความแม่นยำแค่ไหน ? ประสิทธิภาพเป็นอย่างไรบ้าง ? ซึ่งก็หมายถึงว่าเราจะต้องนำเอาวิชาสถิติ (STATISTICS) มาประยุกต์นั่นเอง นอกจากนั้นก็ต้องศึกษารวมถึง SYSTEM ENGINEERING เพื่อที่จะให้เข้าใจว่าระบบย่อยต่าง ๆ นั้น เมื่อมารวมกันเข้าเป็นอาวุธยิงขึ้น จะเกิดปฏิกิริยาระหว่างกันอย่างไรบ้าง ? ควรจะแก้ไขอย่างใด ? และวิธีใด ? อย่างนี้เป็นต้น

เราจะเห็นได้ว่า วิชาที่ต้องศึกษามีมากมายด้วยกัน ดังนั้นในขั้นสูงขึ้นไป วิศวกรคนหนึ่งไม่อาจที่จะ ติดตามความ ก้าวหน้าได้ทุกสาขา จึงได้แยกเฉพาะออกไปในขั้น GRADUATE ว่าจะเป็น MISSILE GUIDANCE ENGINEER, MISSILE PROPULSION ENGINEER หรือ MISSILE STRUCTURE ENGINEER ฯลฯ เหล่านี้เป็นต้น แต่ในขั้นวิชามูลฐาน (BASIC)

แล้ว ควรจะได้ศึกษาไว้ทุกสาขา ทั้งนี้ก็เพื่อความสะดวกในการออกแบบ (DESIGN) ประสานงานร่วมกับระบบต่างๆ เมื่อได้ศึกษาตามนี้แล้วก็ควรจะได้ออกไปฝึกงาน (WORK SHOP) ปฏิบัติงานต่างๆให้มีความชำนาญยิ่งๆ ขึ้นไป ตามคำพูดของท่าน VON BRAUN ที่ว่า "อยากจะเป็น MISSILE EXPERT หรือ ?...... ไม่มีสัตว์ประหลาดเช่นนั้นดอก!"

ฉะนั้น ผู้ที่คิดจะเป็น MISSILE ENGINEER ในอนาคตนั้น จึงจำเป็นที่จะต้องศึกษาวิชาคณิตศาสตร์เบื้องสูง และวิชาฟิสิคส์ให้แข็งมากขึ้นเท่าที่จะมากได้ เพื่อที่จะนำเอาวิชาการต่างๆ เหล่านี้ไปประยุกต์ (APPLY) เข้ากับวิชาวิศวกรรมในด้านอาวุธยิง (MISSILE ENGINEERING) นี้ได้อย่างเพียงพอ เพราะเป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่าวิชาวิศวกรรมในด้านอาวุธยิงนั้น แตกต่างไปจากวิชาวิศวกรรมในด้านอื่นๆ มากมายนัก เกือบจะเรียกได้ว่าวิศวกรรมในด้านนี้เท่ากับรวมวิศวกรรมสาขาอื่นๆ ตลอดจนบรรดานักวิทยาศาสตร์การช่าง (ENGINEER-SCIENTIST) ทั้งมวลเข้าด้วยกัน จึงนับได้ว่า วิชาวิศวกรรมในด้านนี้ทันสมัยเป็นอย่างมาก ซึ่งเหมาะสมแล้วที่บรรดานักศึกษาในยุคอวกาศ (SPACE AGE) นี้ ควรจะสนใจเป็นอย่างยิ่ง

□

หมวดวิชาคณิตศาสตร์

น.ท. พิสุทธิ์ ฤทธาคนี
ผู้รับผิดชอบหมวดวิชา

วิชาพีชคณิต

อาจารย์ผู้ช่วย

ร.ท. หญิง ลมูล สินอาษา

วิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

อาจารย์ผู้ช่วย

ร.อ. ธนธาร สุทธิธรรม
ร.ท. หญิงละเอียด ชุมสาย ณ อยุธยา
ร.ท. หญิงลมูล สินอาษา
ร.ท. หญิงจันทร์เพ็ญ ปู่แก้ว
ร.ท. หญิง สนอง หันตรา

วิชาตรีโกณมิติ

อาจารย์ผู้ช่วย

น.ต. สุรยุทธ นิวาเศะบุตร

วิชาแคลคูลัส

อาจารย์ผู้ช่วย

ว่าที่ น.ต. อุดม ถนอมกุลบุตร
ร.ต. วิชา พวงวงศ์
ร.ต. สมศักดิ์ รักงาม

วิชาเรขาคณิตพรรณา

อาจารย์ผู้ช่วย

น.ต. ชุมพล ผดุงกิจ

วิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง

อาจารย์

น.ท. พิสุทธิ์ ฤทธาคนี
น.ต. วิจิตร ศิริกุล
พ.ต. ม.ร.ว. สุตพันธ์ ทวีวงศ์

บทความใน
วารสารวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
ฉบับ เดือนกันยายน ๒๕๑๖

CSMP
ภาษาใหม่ของคอมพิวเตอร์

โดย

ศาสตราจารย์ พล.อ.ต. ดร. พิสุทธิ์ ฤทธาคนี*

ในปัจจุบันได้มีภาษาคอมพิวเตอร์ใช้เพิ่มขึ้นหลายภาษา เพื่อการใช้งานต่าง ๆ กัน เช่น GPSS (General Purpose Simulation System) ใช้กับปัญหาของแถวคอย (Queue) หรือ DYNAMO ใช้กับปัญหา Inventory หรือระบบโรงงานอุตสาหกรรมต่าง ๆ นอกจากนั้นยังมีภาษาที่ใช้กับระบบสมการ Differential ธรรมดาโดยเฉพาะ ซึ่งมีชื่อเรียกว่า CSMP (Continuous System Modeling Program) ซึ่งเราจะได้นำมากล่าวให้ละเอียดขึ้นเล็กน้อย

เราทราบดีแล้วว่าปัญหาทางวิทยาศาสตร์ที่แทนแบบได้ด้วยระบบสมการ Ordinary differential อาจใช้ Analog Computer แก้ได้ แต่โดยปกติ จะต้องจำกัดอยู่กับปัญหาการประยุกต์คราวละอย่างเท่านั้น เช่น วงจร R – L – C ก็ต้องต่อ Amplifier และ Integrator รวมทั้งส่วนต่าง ๆ ตามวงจรที่ต้องการ ถ้าเปลี่ยน Application ไป ก็ต้องต่อ Component กันใหม่ ด้วยเหตุนี้ จึงมีการพยายามใช้ระบบ Program ที่เรียกว่า Digital – Analog Simulators นี้ขึ้นมา โดยให้ Program ปัญหาต่าง ๆ เป็น Block เช่น 1130/CSMP [ใช้กับ IBM 1130] ในขั้นต่อมาได้ปรับปรุงให้ใช้เป็นภาษาสำหรับ Continuous System นี้เลย โดยใช้ Statement คล้ายกับ FORTRAN เช่น 360/CSMP ใช้กับ IBM 360

---

*ศาสตราจารย์ พล.อ.ต. ดร. พิสุทธิ์ ฤทธาคนี วท.บ. (ทบ)., M.Sc. in Ae. Eng. (Washington), S.M. (Aeronautical Eng). M.I.T., Mat. Eng. M.I.T., Ph.D. (M. Eng.) Maryland, Sigma Gamma Tau, Sigma Xi.

Program ของ 360/CSMP ประกอบด้วย statement 3 ประเภทด้วยกันคือ

1) Structural statement ซึ่งบอกถึงลักษณะของแบบประกอบด้วย FORTRAN statements และ functions ที่พิเศษของ 360/CSMP ก็คือ Functional Blocks 34 ชุด เช่น $y = \int_0^t x\,dt + IC$ (Initial Condition) ซึ่ง 360/CSMP จะเขียนเป็น

$$Y = \text{INTGRL}(IC, X)$$
$$Y(0) = IC$$

เรียกว่า INTEGRATOR

2) Data Statements ซึ่งให้ค่าจำนวนเลขกับ parameter (PARAM) ต่าง ๆ รวมทั้งพฤติภาพเบื้องต้น (Initial Condition) และ Constant ต่าง ๆ ของสมการ (CONST)

3) Control Statements ซึ่งเจาะจงการ execute program และ output ที่เลือก เช่น TIMER เพื่อกำหนด Δt หรือช่วงเวลาในการคำนวณ, Final Time หรือ Finish Time ในการคำนวณ = FINTIM เป็นต้น

การใช้ภาษานี้ทำให้การแก้สมการ differential ไม่ต้องเขียน Program ผ่าน Subroutine เช่น DFERK ซึ่งใช้ Runge Kutta Method ซึ่งทำให้ย่นเวลาในการเขียน การตรวจ และความผิดพลาดในการ program ก็น้อยลง ยกตัวอย่างถ้าเราต้องการจะศึกษาถึงการตอบสนอง (Response) ของอากาศยานในทางหัวขึ้นลง (Pitching) เช่น T-38 ซึ่งบินด้วยความเร็ว 0.9 Mach หรือ 0.9 เท่าความเร็วเสียงที่ระยะสูง 30,000 ฟุต สมการจะอยู่ในรูป

$$\ddot{X} + D\dot{X} + KX = F$$

$$\ddot{X} + 1.70\,\dot{X} + 7.93\,X = 22.2\,y + 22.3\int y\,dt = F$$

ซึ่ง X เป็นมุมหัวขึ้นลงของเครื่องบินจากระดับแกนนอน

$\dot{X} = \dfrac{dx}{dt} =$ XDOT ตามภาษา CSMP

$\ddot{X} =$ X 2 DOT ตามภาษา CSMP

Y = มุมของ พื้นบังคับ หางเสือขึ้นลง

ภาษา CSMP ใหม่ จะเขียนได้อย่างนี้ ถ้าเราต้องการเปลี่ยน Damping constant จาก 1.7 เป็น 1.2 และ 2.3

```
TITLE    BASIC  AIRFRAME  DYNAMICS
*
PARAM        D  =  (1.2, 1.7, 2.3)
*
       X 2 DOT  =  (F - K * X - D * XDOT)
         X DOT  =  INTGRL (0.0, X 2 DOT)
             X  =  INTGRL (XO, X DOT)
             F  =  22.2 * Y + 22.3 * Z
             Z  =  INTGRL (ZO, Y)
*
CONST        K  =  7.93,  XO = 0.0,  ZO = 0.0
TIMER     DELT  =  0.005, FINTIM = 1.5, PRDEL = 0.05, OUTDEL = 0.05
PRINT    X, XDOT, X 2 DOT
PRTPLT   X
LABEL    PITCH ANGLE VERSUS TIME
END
STOP
```

คำที่ยังไม่อธิบายใน Program ก็มี

PRDEL = Interval at which to print results

OUTDEL = Interval at which to print – plot

PRTPLT = print – plotted out put

เราจะเห็นได้ว่าการเขียน Program ทำได้สั้นมาก การตรวจตราก็ทำได้สะดวก ทำให้ Systems Analyst มีเวลาใช้ในการคิดวิเคราะห์เรื่องอื่น ๆ ได้มากขึ้นอีก แต่แน่ละ ต้องใช้ Memory Core มากขึ้น อย่างน้อยก็ต้องมากกว่า 102 K

การใช้ CSMP นี้ทำให้แก้ปัญหา dynamics ต่าง ๆ ได้สะดวกขึ้นมากกว่าเดิม สมการอาจเป็น Non – linear ได้ และสัมประสิทธิอาจเปลี่ยนตามเวลาได้ เช่นการเคลื่อนที่ของจรวด อาจเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้เป็นต้น นอกจากมี Integrator แล้ว ยังทำ Laplace transform ได้โดยตรงไม่ต้องผ่าน Subroutine อื่น ๆ ทำให้แก้ปัญหาได้กว้างขวางออกไปถึงระบบควบคุม, Industrial dynamics ฯลฯ อีกด้วย ในทางทหารการแก้ปัญหา Mathematical Wargames เช่น การใช้ Lanchester's Theory of Combat ก็อาจทำได้สะดวกขึ้น

เช่น
$$\frac{dx}{dt} = P(t) - AY$$
$$\frac{dy}{dt} = -BX$$

ถือระบบสมการแทนการรบระหว่างหน่วยทหาร ซึ่ง LANCHESTER เป็นคนแรกที่ได้คิดค้นขึ้น เราก็อาจเขียนได้ดังนี้

```
TITLE    BATTLE OF IWO JIMA MODEL
*
         X DOT  =  F - A * Y
         Y DOT  =  - B * X
         X      =  INTGRL (XO, X DOT)
         Y      =  INTGRL (YO, Y DOT)
         F      =  5000 * STEP (4)
*
CONST       A = .0113,    B = .0088,    XO = 54,000,    YO = 20,000
*
TIMER  DELT = 1,    FINTIM = 36,    PRDEL = 4
PRINT    X, Y
END
STOP
```

ในแบบง่าย ๆ นี้ เราสมมติว่า ฝ่าย X มีกำลังตอนต้น 54,000 คน และมีกำลังเพิ่มเติมอีกเป็น Step Function ที่เวลา 4 วันต่อมา ด้วยกำลังทหาร 5,000 คน ฝ่าย Y มีกำลังเบื้องต้น 20,000 คน และไม่มีกำลังเพิ่มเติมอีกเลย

ระบบสมการ Differential ธรรมดานี้ อาจจะเป็นของ Probability Vector ก็ได้ เช่น ในระบบซ่อมบำรุงของอากาศยาน สมมติว่า เครื่องบินเป็นขนาดเล็ก สามารถจัดช่างดูแลการซ่อม 1 คน ต่อเครื่องบิน 2 เครื่อง ให้อัตราเครื่องบินชำรุดบินไม่ได้ต้องรับการซ่อมโดยเฉลี่ย λ เครื่องต่อวัน เวลาที่ช่างจะต้องใช้ในการซ่อมเครื่องบินโดยเฉลี่ย $\frac{1}{\mu}$ วันต่อเครื่อง และสมมติว่าช่างจะซ่อมเครื่องบินได้ทีละเครื่องเท่านั้น

ให้ $P_n(t)$ = ความน่าจะเป็นที่เครื่องบิน n เครื่องคอยรับการซ่อม

ให้คำนวณเครื่องบิน $n = 2$ เครื่อง

เราอาจเขียนระบบสมการของ Probability Vector (P_0, P_1, P_2) ให้อยู่ในรูป

$$\frac{dp_0}{dt} = -2\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + \mu P_2(t)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda P_1 - \mu P_2$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

เพื่อความสะดวก เราให้ $(P_0, P_1, P_2) = (X, Y, Z)$ และถ้าเรากำหนดให้ $\lambda = A = 1$; $\mu = B = 2$ หรือ 4 เมื่อเริ่มต้น เครื่องบินทุกเครื่องบินได้

$$P_0(0) = X(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = 0$$

เราอาจเขียน CSMP ได้ ดังนี้

```
TITLE    AIRCRAFT  MAINTENANCE
* PARAM    B = (2.0, 4.0)
  *XDOT = - 2.0 * A * X + B * Y
   YDOT = 2.0 * A * X - (A + B) * Y + B * Z
   ZDOT = A * Y - B * Z
      X = INTGRL (XO, XDOT)
      Y = INTGRL (YO, YDOT)
      Z = INTGRL (ZO, ZDOT)
      Z = 1.0 - X - Y
```

```
*
CONST   A = 1.0,    XO = 1.0,    YO = 0.0,    ZO = 0.0
TIMER   DELT = 0.1,    FINTIM = 50.0,    PRDEL = 1.0
PRINT   X, Y, Z
END
STOP
```

นอกจากนั้น ถ้าท่านผู้อ่านสนใจทางด้าน Inventory Control หรือ Automobile Suspension System ก็อาจหาดูได้จากตำรา System Simulation โดย G. GORDON เราจะเห็นว่าภาษาใหม่ ๆ นี้ทำให้การเขียน Program ง่ายและเร็วขึ้นมาก สามารถช่วยในงานวิจัยต่าง ๆ ได้เป็นอย่างดี.

☆ ☆ ☆

Reference

1) G. GORDON "System Simulation" Prentice – Hall (1969)

2) P.W. ZEHNA "Military Operations Research" US. Naval Postgraduate School (1971)

3) H. TAHA "Operations Research" Mc – Millan (1971)

4) J. BLUM "Introduction to Analog Computation" USAF Academy, Harcourt, Brace & World (1969)

5) น.อ. ดร. พิสุทธิ์ ฤทธาคนี "การใช้ทฤษฎีแห่งแถวคอย กับ การบังคับควบคุมการบินและการซ่อมบำรุง" วิศวกรรมสาร ปีที่ 26 ฉบับที่ 2, เมษายน 2516

ส่วนหนึ่งของหนังสือที่ท่านรัก

เรื่อง

DIFFERENTIAL CALCULUS

จาก

MATHEMATICAL HANDBOOK

M. VYGODSKY

DIFFERENTIAL CALCULUS

222. Introductory Remarks

The source of differential calculus lies in two problems: (1) finding the tangent to an arbitrary line (Sec. 225), (2) finding the velocity, given an arbitrary law of motion (Sec. 223).

Both problems led to one and the same computational problem which lies at the heart of differential calculus. The problem is that of finding, on the basis of a given function $f(t)$, a certain function $f'(t)$ (which later became known as the *derivative*) representing the rate of change of the function $f(t)$ with respect to the variation of the argument (a precise definition of a derivative is given in Sec. 224).

It was in this general form that the problem was posed by Newton and, in similar form, by Leibniz in the 70s and 80s of the seventeenth century. But even during the preceding half century, Fermat, Pascal and other scholars had actually given rules for finding the derivatives of many functions.

Newton and Leibniz brought this development to its culmination. They introduced the general concepts of derivative [1] and differential [2] and also the symbols which greatly simplified computations. They refined the apparatus of differential calculus and applied it to the solution of numerous problems in geometry and mechanics. It was only in the 19th century that the whole system was placed on a rigorously logical basis (see Sec. 191).

223. Velocity [3]

In order to determine the velocity of a train, we note the point at which it is located at time $t=t_1$ and then at time $t=t_2$. Let these be the distances $s=s_1$ and $s=s_2$. The increment (Sec. 217a) in distance $\Delta s=s_2-s_1$ is divided by

---

[1] Newton used the term "fluxion" The term "derivative" was introduced at the end of the 18th century by Arbogast.

[2] The term "differential" (from the Latin *differentia*) was given by Leibniz.

[3] This section introduces Sec. 224

the increment in the time $\Delta t = t_2 - t_1$. The quotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

yields the average *velocity* of the train for the interval (t_1, t_2) In the case of nonuniform motion, the average velocity does not describe the rate of motion at time $t = t_1$ with sufficient exactitude. But the smaller Δt, the more exact is this speed. For this reason, the *speed at time* $t = t_1$ is the limit to which the ratio $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tends as $\Delta t \longrightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2}$$

Example. *Free fall of a body.* We have

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \tag{3}$$

Since $t_2 = t_1 + \Delta t$, it follows that

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

Hence

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2}{\Delta t} \tag{4}$$

Having computed the limit, we find

$$v = g t_1 \tag{5}$$

The notation t_1 is introduced to bring out the *constancy of t when computing the limit*. Since t_1 is an arbitrary value of time, the subscript 1 can best be dropped; then from the formula

$$v = gt \tag{5a}$$

it is evident that the velocity v (like the distance s) is a function of the time. The form of the function v depends completely on the form of the function s, so that the function s generates ("derives", as it were) the function v. Hence the name, the "derivative function".

224. The Derivative Defined [1]

Let $y=f(x)$ be a continuous function (of the argument x) defined in the interval (a, b) and let x be some point of this interval. We give to the argument x an increment Δx (positive or negative). The function $y=f(x)$ will receive the increment Δy, equal to

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{1}$$

If Δx is infinitesimal, then Δy is also infinitesimal (Sec. 219).

The limit to which the ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tends as $\Delta x \longrightarrow 0$, i.e.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

is itself a function of the argument x (cf. Sec. 223). This function is called the *derivative* of the function $f(x)$ and is denoted by $f'(x)$ or y'.

Briefly, a *derivative function* is the limit [2] to which tends the ratio of an infinitesimal increment in the function to a corresponding infinitesimal increment in the argument.

Note. In the process of finding the limit (2), the quantity x is regarded as a constant.

Example 1. Find the value of the derivative of the function $y=x^2$ for $x=7$.

Solution. For $x=7$ we have $y=7^2=49$. Give to the argument x an increment Δx. The argument becomes equal to $7+\Delta x$, and the function becomes $(7+\Delta x)^2$.

The increment Δy of the function is

$$\Delta y=(7+\Delta x)^2-7^2=14\Delta x+\Delta x^2$$

The ratio of this increment to the increment Δx is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{14\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=14+\Delta x$$

Now find the limit to which $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tends as $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(14+\Delta x)=14$$

The desired value of the derivative is 14.

---

[1] It is advisable to read Sec. 223 first.

[2] For cases when the limit does not exist, see Sec. 231.

Example 2. Find the derivative of the function $y=x^2$ (for an arbitrary value of x). Give to the argument an increment Δx. The argument becomes $x+\Delta x$. The increment Δy of the function is $(x+\Delta x)^2-x^2=2x\,\Delta x+\Delta x^2$. The ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is equal to $\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$. The derivative function is the limit of this ratio as $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$y'=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x)=2x$$

The sought-for derivative $y'=2x$. For $x=7$ we get $y'=14$ (cf. Example 1).

Example 3. Find the derivative of the function $y=\sin x$ (the argument is expressed in radian measure).

Solution. Give to the argument an increment Δx. The increment of the function is

$$\Delta y=\sin (x+\Delta x)-\sin x=2 \cos \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

The ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is

$$\frac{2 \cos \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

The limit of this ratio as $\Delta x \longrightarrow 0$ (Secs. 213, 215) is equal to

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x$$

Hence, $y'=\cos x$.

225. Tangent Line

The *tangent line* to the curve L at the point M (Fig. 224) is the straight line $T'MT$ with which the secant line MM' tends to coincidence [1] when the point M', always on L, tends to M (either from the right or from the left).

Note. From Fig. 225 it is evident that the tangent can have, besides the point of tangency, points common to the curve and the tangent.

---

[1] The expression "tends to coincidence" means that the acute angle between the fixed straight line $T'MT$ and the rotating line MM' tends to zero.

If the curve L is the graph of a function $y=f(x)$, then the slope of the tangent is equal to the value of the derivative function at the correspo nding point.[1)]

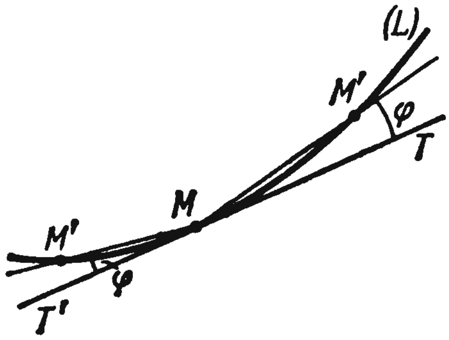


Fig. 224

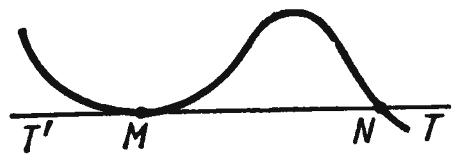


Fig. 225

This is clear from Fig. 226. The slope k of the secant line is $k=\frac{QM'}{MQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. If M' tends to M then k has as a limit the slope m of the tangent. Hence, $m=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, i.e. (Sec. 224) $m=f'(x)$

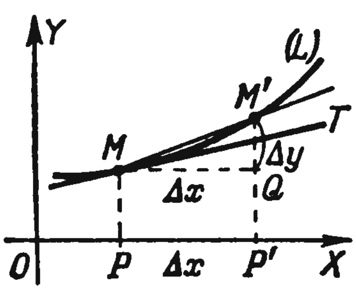


Fig. 226

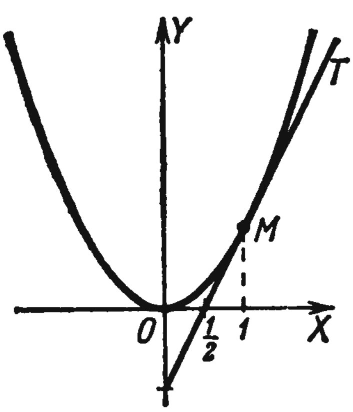


Fig. 227

Example 1. Find the slope and the equation of the tangent to the parabola $y=x^2$ at the point $M(1, 1)$ (Fig. 227)

Solution. We have $y'=2x$ (Sec. 224, Example 2). For $x=1$ we get $y'=2$. The desired slope of the tangent $m=2$. The equation of the tangent will be $y-1=m(x-1)$, i. e. $y=2x-1$.

---

1) If the graph has no tangent, the function $f(x)$ has no derivative, and vice versa.

Example 2. Find the equation of the tangent to the curve $y=\sin x$ (sine curve, Fig. 228) at the point $O(0, 0)$.

Solution. We have $y'=\cos x$ (Sec. 224, Example 3). For $x=0$ we get $y'=1$. The equation of the tangent is $y=x$.

Note that the sine curve lies on both sides of the tangent line $T'OT$.

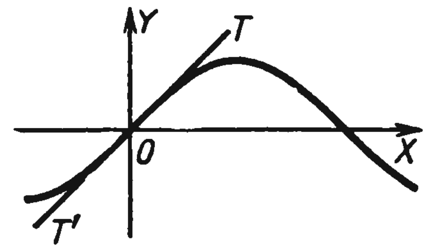


Fig. 228

Example 3. The slope of the straight line $y=ax+b$ (it is equal to a) is the derivative of the function $y=ax+b$ (the tangent to a straight line is the line itself).

226. The Derivatives of Some Elementary Functions

1. *The derivative of a constant quantity* is equal to zero

$$(a)'=0 \tag{1}$$

Physical meaning (Sec. 223): the velocity of a fixed point is zero.

Geometrical meaning: the slope of the straight line $y=a$ (UV in Fig. 229) is zero (cf. Sec. 225, Example 3).

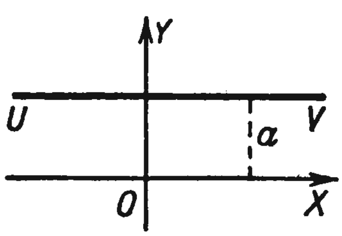


Fig. 229

Note. For some values of x a function can have a zero derivative without being a constant. Thus, the derivative $(\sin x)'=\cos x$ (Sec. 224, Example 3) is zero for $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$, etc.

But if the derivative $f'(x)$ is *identically* zero, then the function $f(x)$ must definitely be constant (Sec. 265, Theorem 1).

2 The *derivative of an independent variable* is unity:

$$(x)'=1 \tag{2}$$

Geometrical meaning: the slope of the straight line $y=x$ is equal to unity

Physical meaning: if the distance covered by a body is numerically equal to the time spent in motion, then the velocity is numerically equal to unity.

3. The *derivative of the linear function* $y=ax+b$ is the constant quantity a·

$$(ax+b)'=a \tag{3}$$

4. The *derivative of a power function* is equal to the product of the exponent by the power function with exponent decreased by one

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{4}$$

Examples.

(1) $(x^2)' = 2x$.

(2) $(x^3)' = 3x^2$.

(3) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

227. Properties of a Derivative

1. A constant factor may be taken outside the sign of the derivative:

$$[af(x)]' = af'(x)$$

Examples.

(1) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$.

(2) $\left(\frac{5}{x^2}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 5\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{10}{x^3}$

(3) $(\sqrt{2x})' = \sqrt{2}(\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

2. The derivative of an algebraic sum of some fixed number of functions is equal to the algebraic sum of their derivatives:

$$[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x)$$

Examples.

(4) $(0.3x^2 - 2x + 0.8)' = (0.3x^2)' - (2x)' + (0.8)' = 0.6x - 2$

(the derivative of the last term is zero; Sec. 226, Item 1).

(5) $\left(\frac{3}{x^2} - 6\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{3}{x^2}\right)' - 6(\sqrt{x})' = -\frac{6}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

228. The Differential

Definition. Let the increment (Sec. 217a) in the function $y=f(x)$ be split up into a sum of two terms:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \tag{1}$$

where A is not dependent on Δx (i. e. is constant for a given value of the argument x) and α is of higher order (Sec. 217) than Δx (as $\Delta x \longrightarrow 0$).

Then the first ("principal") term, which is proportional to Δx, is called the *differential* of the function $f(x)$ and is denoted by dy or $df(x)$.

Example 1. Take the function $y=x^3$. Then [1]

$$\Delta y = 3x^2\,\Delta x + (3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) \tag{2}$$

Here, the coefficient $A=3x^2$ is not dependent on Δx, so that the first term is proportional to Δx; the other term, $\alpha = 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$ however is of higher (second) order with respect to Δx. Hence, the term $3x^2\,\Delta x$ is the differential of the function x^3

$$dy = 3x^2\,\Delta x \quad \text{or} \quad d(x^3) = 3x^2\,\Delta x \tag{3}$$

Theorem 1. The coefficient A is equal to the derivative $f'(x)$; in other words, the differential of a function is equal to the product of the derivative by the increment in the argument:

$$dy = y'\,\Delta x \tag{4}$$

or

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x \tag{4a}$$

Example 2. In Example 1 we found that $d(x^3)=3x^2\,\Delta x$. The coefficient $3x^2$ is the derivative of the function x^3.

Example 3. If $y=\frac{1}{x}$, then $y'=-\frac{1}{x^2}$ (Sec. 226, Item 4).

Therefore $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$.

Let us verify this. We have $\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x\,(x+\Delta x)}$. If we split up this expression into two terms, the first being $-\frac{\Delta x}{x^2}$, then the

---

[1] The notation Δx^2 is the same as $(\Delta x)^2$ (parentheses are dropped). If it is necessary to indicate the increment of the function x^2, then we write $\Delta\,(x^2)$.

second will be $\frac{\Delta x^2}{x^2 (x+\Delta x)}$ The latter term is of higher (second) order with respect to Δx.[1]

Theorem 2. If the derivative is not equal to zero, then the differential of the function and its increment are equivalent (as $\Delta x \longrightarrow 0$); if the derivative is zero (the differential is then also zero), they are not equivalent.

Example 4. If $y=x^2$, then $\Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$ and $dy = 2x\,\Delta x$. For $x=3$ the quantities $\Delta y = 6\Delta x + \Delta x^2$ and $dy = 6\Delta x$ are equivalent, for $x=0$ the quantities $\Delta y = \Delta x^2$ and $dy = 0$ are not equivalent.

The equivalence of the differential and the increment is frequently employed in approximate calculations (as a rule, it is easier to compute a differential than a derivative).

Example 5. We have a metal cube with edge $x=10.00$ cm. When heated, the edge increased by $\Delta x = 0.01$ cm. How much did the volume V of the cube increase?

Solution. We have $V=x^3$ so that $dV = 3x^2\,\Delta x = 3\cdot 10^2\cdot 0.01 = 3$ (cm^3). The increase in the volume ΔV is equivalent to the differential dV so that $\Delta V \approx 3$ cm^3. The total computation would have yielded $\Delta V = 10.01^3 - 10^3 = 3.003001$. But in this result all the digits, except the first, are unreliable and so we have to round off to 3 cm^3 in any case.

Other examples of the employment of a differential in approximate computations are given in Sec. 243 (Example 4) and Sec. 248.

229. The Mechanical Interpretation of a Differential

Let $s=f(t)$ be the distance of a rectilinearly moving point from its initial position (t is the time in transit). The increment Δs is the distance covered by the point during the time interval Δt, while the differential $ds = f'(t)\,\Delta t$ (Sec. 228, Theorem 1) is the distance the point would have covered during time Δt if it had maintained the speed $f'(t)$ reached at time t. For an infinitesimal Δt the imagined distance ds differs from the true distance Δs by an infinitesimal of order higher than Δt. If the velocity at time t is not equal to zero, then ds yields an approximation of the small displacement of the point (cf. Sec. 228, Theorem 2).

---

[1] It is assumed that $x \neq 0$ $\left(\text{for } x=0 \text{ the function } \frac{1}{x} \text{ itself is not defined}\right)$.

230. The Geometrical Interpretation of a Differential

Let curve L (Fig. 230) be the graph of a function $y=f(x)$. Then

$$\Delta x = MQ, \quad \Delta y = QM'$$

The tangent line MN divides the segment Δy into two parts QN and NM'. The former is proportional to Δx and is equal to $QN = MQ \cdot \tan \angle QMN = \Delta x f'(x)$ (see Sec. 225), i. e. QN is the differential dy.

The latter part NM' yields the difference $\Delta y - dy$; it is of higher order with respect to Δx. In the given case, when $f'(x) \neq 0$ (the tangent line is not parallel to the x-axis), the segments QM' and QN are equivalent (Sec. 228, Theorem 2). In other words, NM' is also of higher order with respect to $\Delta y = QM'$. This is evident from the figure (as M' approaches M, the segment NM' comprises an ever smaller portion of the line segment QM').

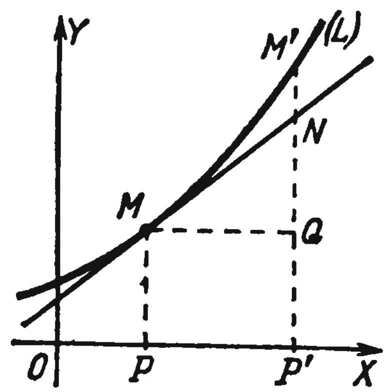


Fig. 230

Thus, the differential of a function is graphically depicted as the increment in the ordinate of the tangent line.

231. Differentiable Functions

A continuous function which (at a given point) has a differential is called *differentiable* at that point.

A discontinuous function cannot have either a derivative or a differential at a point of discontinuity (the graph does not have a tangent line; see Fig. 214 on page 264 and Fig. 219 on page 279).

A function which is continuous at some point may not have a differential at that point. Below we consider three characteristic cases.

Case 1. The function $y=f(x)$ has an *infinite derivative* at the given point, i. e.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

or

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

(thus, Δy is of lower order than Δx) The graph has a vertical tangent line.

Notation (by convention):

$$f'(x)=\infty$$

Example 1. The function $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (Fig. 231) is not differentiable at the point $x=0$. The quantity

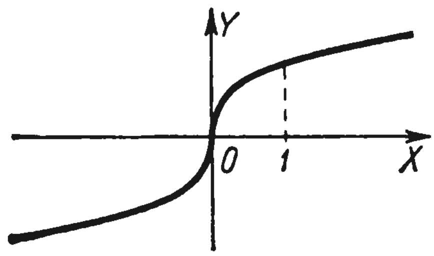


Fig. 231

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}$$

has an infinite limit $+\infty$ as $\Delta x \to 0$.

At the point $x=0$ the tangent line coincides with the y-axis.

Note 1. A function which at a given point has a *finite* derivative is differentiable. Conversely, a differentiable function has a finite derivative.

Case 2. The ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ has no limit as $\Delta x \to 0$ (i. e. the function $y=f(x)$ has no derivative), but it has a right-hand limit (as $\Delta x \to +0$, Sec. 219a) and a left-hand limit (as $\Delta x \to -0$) The former is called a *right-hand derivative* and is denoted by $f'(x+0)$ and the second is called a *left-hand derivative* and is denoted by $f'(x-0)$.

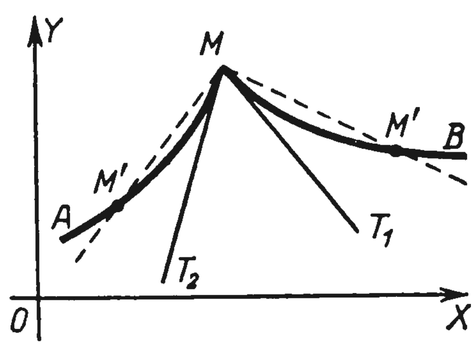


Fig. 232

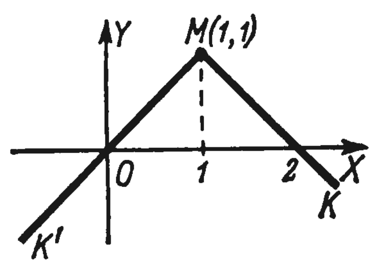


Fig. 233

At the point of interest (M in Fig. 232) the graph has no tangent line, but it has a *right-hand tangent line* MT_1 and a *left-hand tangent line* MT_2; that is, the secant line MM' tends to coincidence with MT_1 when M' tends to M from the right, and with MT_2 when M' tends to M from the left.

Example 2. The function $f(x)=1-|1-x|$ (Fig. 233) is not differentiable at the point $x=1$. The line $K'MK$ has no tangent line at the point $M(1, 1)$. The right-hand derivative $f'(1+0)=-1$, the left-hand derivative $f'(1-0)=1$.

Case 3. The function $y=f(x)$ has no left-hand or right-hand derivative (or has neither) The graph does not have a corresponding one-sided tangent.

Example 3. The function given by the formula $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ (Fig. 234) and redefined as $f(0)=0$ $\left(\text{the expression } \sin\frac{1}{x} \text{ is meaningless for } x=0\right)$

is continuous at the point $x=0$. However, when M' tends to O from the right (or the left), the secant line OM' oscillates between the straight lines UV $(y=x)$ and $U'V'$ $(y=-x)$ and does not tend to either straight

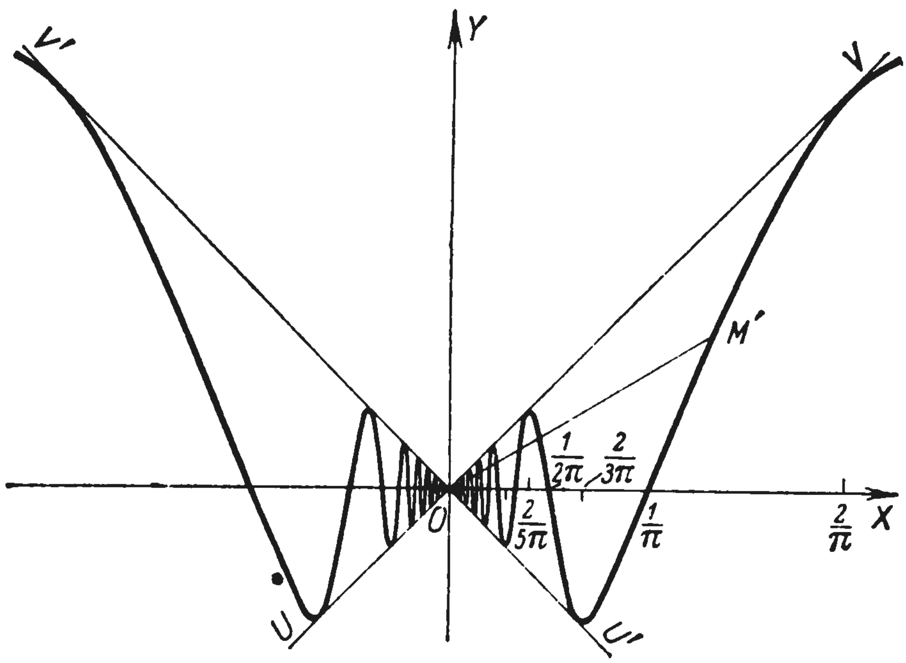


Fig. 234

line. The graph, at point O, has neither right-hand nor left-hand tangent line, and the function $f(x)$ has neither right-hand nor left-hand derivative.

Note 2. One can even think up continuous functions that have no derivative at any point at all.[1] Hence, the existence of a derivative does not follow logically from the continuity of a function. This was first pointed out by the great Russian mathematician N. I. Lobachevsky.[2]

---

[1] We can neither construct nor even imagine a curve graphically depicting such a function, for our conception of a curve involves an abstraction from the properties of real objects and it is intimately bound up with the concept of direction. Even in Example 3, the "line" $y=x\sin\frac{1}{x}$ is devoid of direction at the point $x=0$. Here, however our imagination is aided by the fact that the graph has a definite direction in any neighbourhood of point O.

[2] Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) created non-Euclidean geometry and made valuable contributions to algebra and analysis. He was also a prominent public figure, and an outstanding teacher who did much in the sphere of education. His whole life and work are closely bound up with Kazan University from which he graduated and at which he was professor and rector.

232. The Differentials of Some Elementary Functions

1. The differential of a constant is zero:

$$da = 0 \tag{1}$$

2. The differential of an independent variable is equal to its increment:

$$dx = \Delta x \tag{2}$$

3. Generally, the differential of a linear function is equal to its increment:

$$d(ax + b) = \Delta(ax + b) = a\,\Delta x \tag{3}$$

With respect to the other functions, the differential and increment *are not equal*. (They differ by a quantity of higher order of smallness with respect to Δx; Sec. 228.)

4. The differential of a power function x^n is equal to $nx^{n-1}\,\Delta x$ [cf. (4), Sec. 233]:

$$dx^n = nx^{n-1}\,\Delta x \tag{4}$$

233. Properties of a Differential

1. A constant factor may be taken outside the sign of the differential:

$$d[a\,f(x)] = a\,df(x) \tag{1}$$

2. The differential of an algebraic sum of a fixed number of functions is equal to the algebraic sum of their differentials:

$$d[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = df_1(x) + df_2(x) - df_3(x) \tag{2}$$

3. The differential of a function is equal to the product of the derivative by the differential of the argument:

$$df(x) = f'(x)\,dx \tag{3}$$

This follows from Sec. 228 (Theorem 1) and Sec. 232, Item 2

In particular (cf. Sec. 232, Item 4),

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx \tag{4}$$

234. The Invariance of the Expression $f'(x)\,dx$

The expression $f'(x)\,\Delta x$ represents (Sec. 228, Theorem 1) the differential $df(x)$ when x is regarded as the argument. But if the quantity x itself is regarded as a function of some argument t, then the expression $f'(x)\,\Delta x$, as a rule, *does not* *represent the differential* (see Example 1 below); the only exception is the case of a linear relation: $x = at + b$.

On the contrary, formula (3), Sec. 233,

$$df(x) = f'(x)\,dx \tag{1}$$

is true both when x is the argument (then $dx = \Delta x$) and when x is a function of t (see Example 2 below).

This property of the expression $f'(x)\,dx$ is called its *invariance*.

Example 1. The expression $2x\,\Delta x$ is the differential of the function $y = x^2$ when x is the argument.

Now put

$$x = t^2 \tag{2}$$

and we will consider t as the argument. Then

$$y = x^2 = t^4 \tag{3}$$

From (2) we find

$$\Delta x = 2t\,\Delta t + \Delta t^2 \tag{4}$$

Hence

$$2x\,\Delta x = 2t^2\,(2t\,\Delta t + \Delta t^2) \tag{5}$$

This expression is not proportional to Δt and therefore now $2x\,\Delta x$ is not a differential. The differential of the function y is found from (3):

$$dy = 4t^3\,\Delta t \tag{6}$$

Comparing (5) and (6) we see that $2x\,\Delta x$ and dy differ by the quantity $2t^2\,\Delta t^2$, which is of second order with respect to Δt.

Example 2. The expression $2x\,dx$ is the differential of the function $y = x^2$ *for any argument* t. For example, let $x = t^2$. Then

$$dx = 2t\,\Delta t$$

Hence

$$2x\,dx = 2t^2 \cdot 2t\,\Delta t = 4t^3\,\Delta t$$

Comparing with (6), we see that

$$dy = 2x\,dx$$

235. Expressing a Derivative in Terms of Differentials

The derivative of a function y with respect to the argument x is equal to the ratio of the differential of the variable y to the differential of the variable x:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}$$

The subscript x on the symbol y' emphasizes the fact that *when we are seeking the derivative*, the argument is x. The differentials dy and dx *may be taken with respect to any argument* (see Sec. 234).

An extremely convenient notation for a derivative is often the expression $\frac{dy}{dx}$ and similar expressions: $\frac{df(x)}{dx}$ (the derivative of the function $f(x)$ with respect to x), $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ (the derivative of the function $\varphi(t)$ with respect to t), $\frac{d(3x^2+2x+1)}{dx} = 6x+2$ and so forth.

The following conventional notations are also employed: $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d}{dx}(3x^2+2x+1)$ and so forth, which are particularly convenient when taking the derivative of a complicated expression.

236. The Function of a Function (Composite Function)

A quantity y is called a *function of a function (composite function)* if it is regarded as the function of some (auxiliary) variable u, which in turn depends on an argument x:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x) \tag{1}$$

In this way, y is a function of x, and this may be written as

$$y = f[\varphi(x)] \tag{2}$$

If $f(u)$ and $\varphi(x)$ are continuous functions, then the function $f[\varphi(x)]$ is also continuous.

Example. If $y = u^3$ and $u = 1+x^2$, then y is a composite function of x, and we write

$$y = (1+x^2)^3$$

237. The Differential of a Composite Function

Finding the differential of a composite function does not require any special rules (due to the invariance of the expression $f'(x)\,dx$, Sec. 234).

Example 1. Find the differential of the function $y = (1+x^2)^3$.

Solution. Regarding y as a composite function ($y = u^3$, $u = 1+x^2$), we have

$$dy = 3u^2\,du, \quad du = 2x\,dx$$

Whence

$$dy = 3(1+x^2)^2 \cdot 2x\,dx = (6x + 12x^3 + 6x^5)\,dx$$

The same result is obtained directly:

$$dy = d(1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6) = (6x + 12x^3 + 6x^5)\,dx$$

Note. In actual practice, no special designation is introduced for the auxiliary variable u. In Example 1, the procedure is:

$$d(1+x^2)^3 = 3(1+x^2)^2 \cdot d(1+x^2) = 3(1+x^2)^2\, 2x\,dx$$

Example 2. Find $d\sqrt{a^2 - x^2}$.

Solution.

$$d\sqrt{a^2-x^2} = d(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(a^2-x^2) =$$

$$= -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

238. The Derivative of a Composite Function

The derivative of a function of a function is equal to the derivative of the function with respect to the auxiliary variable multiplied by the derivative of the auxiliary variable with respect to the argument:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{1}$$

Example 1. Find the derivative of the function

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(with respect to the argument x).

Putting

$$y = u^{\frac{1}{2}}, \quad u = a^2 - x^2$$

we have

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x$$

By formula (1) we get

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Note. When using the notation $(\sqrt{a^2-x^2})'$, beginners frequently make the following mistake. Knowing that $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, they write the result as $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$ and forget to multiply by $(a^2-x^2)'=-2x$. The error is due to imperfect notation (it is not seen with respect to what variable the derivative is taken) Therefore, it is advisable at the beginning to write as follows:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)$$

When sufficient skill has been developed, the intermediate transformation is done mentally.

The best safeguard against mistakes is a preliminary computation of the differential $d\sqrt{a^2-x^2}$. Obtaining (Sec. 237, Example 2) $\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, we take the coefficient of dx (i. e. we divide by dx) and find for the derivative the expression $\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Example 2. Find the derivative of the function $y=\sin^2 2x$.

Solution. Here we have a chain of three relations:

$$y=u^2,\quad u=\sin v,\ v=2x$$

By analogy with (1) we have $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$. Taking into account that $\frac{du}{dv}=\frac{d\sin v}{dv}=\cos v$ (Sec. 224, Example 3), we find

$$\frac{dy}{dx}=2u\cdot\cos v\cdot 2=4\sin 2x\cdot\cos 2x=2\sin 4x$$

To avoid mistakes, it is best to proceed as follows:

$$d\sin^2 2x=2\sin 2x\cdot d\sin 2x=2\sin 2x\cos 2x\cdot d(2x)=4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot dx$$

Dividing by dx we obtain

$$\frac{d\sin^2 2x}{dx}=4\sin 2x\cos 2x$$

239. Differentiation of a Product

Rule. The differential of a product of two functions is equal to the sum of the products of each of the functions by the differential of the other:

$$d(uv)=u\,dv+v\,du \tag{1}$$

For three factors we have

$$d(uvw)=vw\cdot du+uw\cdot dv+uv\cdot dw \tag{2}$$

and similarly for a greater number of factors.

The derivative of a product is computed by the same rule (the word "differential" is both times replaced by the word "derivative"):

$$(uv)' = uv' + vu' \tag{1a}$$

$$(uvw)' = vwu' + uwv' + uvw' \tag{2a}$$

Example 1. Find the differential and the derivative of the function $(2x^2+3x)(x^3-2)$.

Solution.

$$\begin{aligned} d[(2x^2+3x)(x^3-2)] &= (2x^2+3x)\,d(x^3-2)+(x^3-2)\,d(2x^2+3x) = \\ &= (2x^2+3x)\,3x^2\,dx+(x^3-2)(4x+3)\,dx = \\ &= (10x^4+12x^3-8x-6)\,dx \end{aligned}$$

The coefficient $10x^4+12x^3-8x-6$ is the derivative. By formula (1a) we would have found

$$[(2x^2+3x)(x^3-2)]' = (2x^2+3x)(x^3-2)' + (x^3-2)(2x^2+3x)'$$

and so forth.

Example 2.

$$d\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = xd\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= x\cos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\frac{1}{x}\,dx = \frac{-x\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx + \sin\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)dx$$

Whence

$$\frac{d}{dx}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \tag{3}$$

Note. It is assumed that $x \neq 0$. For $x=0$ the function $x\sin\frac{1}{x}$ is not defined. But even if it is redefined (Sec. 231, Example 3), it is not differentiable for $x=0$ [as $x \to 0$, the derivative (3) does not tend to any limit; see Fig 234]

240. Differentiation of a Quotient (Fraction)

Rule. The differential of a fraction is equal to the product of the denominator by the differential of the numerator minus the product of the numerator by the differential of the denominator, the whole expression divided by the denominator squared:

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \tag{1}$$

The same rule holds for the derivative of a fraction (the word "differential" is replaced in each case by the word "derivative")

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \qquad (1a)$$

Example 1. Find y' if $y=\frac{2x+1}{x^2+1}$

We have

$$y' = \frac{(x^2+1)(2x+1)' - (2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)\,2-(2x+1)\,2x}{(x^2+1)^2}$$

i. e.

$$y' = \frac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Example 2. Find $d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

First consider the given expression as a composite function $\left(y=\sqrt{u};\ u=\frac{1+x}{1-x}\right)$:

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, d\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, \frac{(1-x)\,dx+(1+x)\,dx}{(1-x)^2}$$

Simplifying, we get

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

241. Inverse Function

If from the relation $y=f(x)$ there follows the relation $x=\varphi(y)$, then the function $\varphi(y)$ is called an *inverse* function of $f(x)$.

Example 1. The inverse of the function $y=x^2$ is the (double-valued) function $x=\pm\sqrt{y}$.

Example 2. The inverse of the function $y=\sin x$ is the (infinitely multiple-valued) function $x=\arcsin y$ (defined for all values of y less than unity in absolute value).

Note. As a rule, an inverse function is multiple-valued.[1] The multiple-valuedness can be avoided if we narrow the range of variation of the argument of the initial function. For instance, in Example 1 we can eliminate the negative values of the argument x and then the inverse function $x=+\sqrt{y}$ will be single-valued.

---

[1] The only exceptions are those cases when the value of the direct function, as the argument increases, either constantly increases or constantly decreases (such functions are termed *monotonic*).

If the earlier notations of the variables are retained, the graph of the function $y=f(x)$ also serves as the graph of the inverse function $x=\varphi(y)$.

Ordinarily, however, the notations of the variables change roles and the argument of the inverse function is denoted by x, like the argument of the direct function.

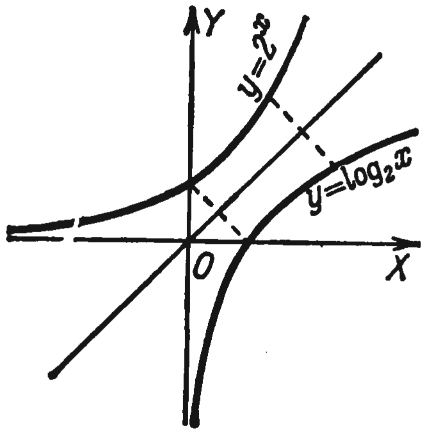


Fig. 235

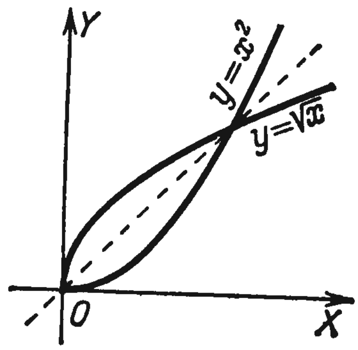


Fig. 236

Example 3. The inverse (single-valued) function of $y=x^2$ is $y=\sqrt{x}$; the inverse function of $y=2^x$ is the function $y=\log_2 x$.

In this notation, the graphs of the initial and inverse functions are symmetric with respect to the straight line $y=x$ (Fig. 235).

The derivative of an inverse function. The derivative of an inverse function is equal to unity divided by the derivative of the original function: [1]

$$\frac{dx}{dy}=1:\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Example 4. Let us consider the function $y=x^2$ for positive values of x. The inverse function (Fig. 236) is $x=\sqrt{y}$. We have

$$\frac{dy}{dx}=2x, \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

---

[1] If the derivative $\frac{dy}{dx}$ vanishes, then formula (1) may be understood in the sense that the inverse function has an infinite derivative at the point in question, i.e. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$ (see Sec. 231, Case 1; cf. Sec. 213, Note 2).

242. Natural Logarithms

The formula for differentiating a logarithmic function (Sec. 243) is of the most elementary form when the base is the number

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$$

(Sec. 214). The logarithm is then called *natural* and is denoted by ln.[1]

In order to transform a natural logarithm to a logarithm to any base a, multiply it by the modulus for changing from natural logarithms to the other system of logarithms (equal to $\log_a e$):

$$\log_a x = \log_a e \ln x \tag{1}$$

Conversely, to change from a logarithm to the base a to the natural logarithms, multiply it by $\ln a$ (i.e. by $\log_e a$): [2]

$$\ln x = \ln a \log_a x \tag{2}$$

Mnemonic rule: Writing the formula (1) in complete form, we get $\log_a x = \log_a e \log_e x$. Discard the log signs and form fractions of the remaining letters $\frac{x}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{x}{e}$; then the first is the product of the last two. The same holds for formula (2).

The modulus for changing from *natural to common* logarithms is denoted by M:

$$M = \log e = 0.43429 \tag{3}$$

(it is easy to remember the first four digits: $M = 0.4343$). Formulas (1) and (2) take the form [3]

$$\log x = M \ln x, \tag{4}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x \tag{5}$$

---

[1] The initial letters of the Latin words *logarithmus naturalis*. The number e is irrational; more, it is transcendental, that is to say, it cannot be the root of any algebraic equation with rational coefficients. Also transcendental are the natural logarithms of all integers, and also the common logarithms of all integers (except 1, 10, 100, 1000, etc.). The transcendence of the number e was proved in 1871 by the French mathematician Hermite, the transcendence of the logarithms was proved by the Soviet mathematician A. Gelfond in 1934.

[2] The quantities $\log_a e$ and $\log_e a$ are reciprocal ($\log_a e \cdot \log_e a = 1$).

[3] To avoid confusion as to when to multiply by M and when by $\frac{1}{M}$, remember that the common logarithm of any number is *less* than the natural logarithm (for example, $\ln 10 \approx 2.3$, while $\log 10 = 1$).

where

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2.3026 \qquad (6)$$

For multiplication by M and $\frac{1}{M}$ there are special tables (p. 843).

Example 1. Find ln 100.

Using formula (5) we get $\ln x \approx 2.3026 \cdot 2 \approx 4.605$.

Example 2. Compute e^3 using tables of common logarithms.

We have $\log(e^3) = 3 \log e = 3M = 1.3029$, whence $e^3 \approx 20.09$.

One can also use the table of natural logarithms (pp. 839-842). We have $\ln(e^3) = 3$; it is necessary to interpolate to find four decimals of the number e^3.

Example 3. The common logarithm of some number is 0.5041; find its natural logarithm.

We have

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x \approx 2.303 \cdot 0.5041 \approx 1.161$$

This product may be found with the aid of the table on p. 843; namely,

$$\begin{array}{l} \frac{1}{M} \cdot 0.50 \quad\ \approx 1.1513 \\ \frac{1}{M} \cdot 0.0041 \approx 0.0094 \\ \hline \frac{1}{M} \cdot 0.5041 \approx 1.161 \end{array}$$

243. Differentiation of a Logarithmic Function

The differential and derivative of a natural logarithm (Sec. 242) are expressed by the formulas

$$d \ln x = \frac{dx}{x}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

If the base of the logarithm is an arbitrary number, then [1]

$$d \log_a x = \log_a e \frac{dx}{x}, \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \log_a e \cdot \frac{1}{x} \qquad (4)$$

[1] Formula (3) may be obtained from (1) by taking into account (1), Sec. 242.

In particular, for the common logarithms

$$d \log x = \frac{M\,dx}{x}, \qquad (3a)$$

$$\frac{d}{dx} \log x = M \cdot \frac{1}{x} \qquad (4a)$$

Here, $M \approx 0.4343$ is the modulus for changing from natural logarithms to common logarithms (Sec. 242).

Example 1.

$$\frac{d}{dx} \ln (ax+b) = \frac{1}{ax+b} \cdot \frac{d}{dx} (ax+b) = \frac{a}{ax+b}$$

Example 2.

$$d \ln \frac{1+x}{1-x} = d \ln (1+x) - d \ln (1-x) = \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x} = \frac{2dx}{1-x^2}$$

Example 3. Find the value of the derivative of $\log x$ for $x = 100$.

Formula (4a) yields $(\log x)' = \frac{M}{x} \approx \frac{0.4343}{100} \approx 0.0043$

Example 4. Find $\log 101$ without using tables.

The increment $\Delta \log x$ is approximately equal to the differential $d \log x = \frac{M\,\Delta x}{x}$. For $x = 100$ and $\Delta x = 1$ we obtain $\Delta \log x \approx \frac{0.4343 \cdot 1}{100} \approx 0.0043$. Hence,

$$\log 101 = \log 100 + \Delta \log 100 \approx 2 + 0.0043 = 2.0043$$

which coincides with the tabular value.

244. Logarithmic Differentiation

When differentiating expressions which are in a form convenient for taking logarithms, the latter operation may be performed first.

Example 1. Differentiate the function $y = xe^{-x^2}$

(1) Taking logs to the base e, we get

$$\ln y = \ln x - x^2 \qquad (1)$$

(2) Now differentiate both sides of (1):

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - 2x\,dx$$

(3) Substituting for y the expression xe^{-x^2}, we get

$$dy = xe^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x\right) dx = e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx$$

Example 2. Differentiate the function $y = x^x$.
Take the following steps.
(1) $\ln y = x \ln x$,

(2) $\frac{y'}{y} = x(\ln x)' + \ln x = 1 + \ln x$,

(3) $y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$

Example 3. Differentiate the function

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(cf. Sec. 240, Example 2).

(1) $\ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$,

(2) $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$,

(3) $y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

Example 4. Differentiate the function

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$$

(1) $\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+3)$,

(2) $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}$,

(3) $$y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}\right) =$$

$$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$$

The foregoing method is called *logarithmic differentiation*, and the derivative of the logarithm of the function $y = f(x)$,

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

is called the *logarithmic derivative* of the function $f(x)$.

245. Differentiating an Exponential Function

The differential and derivative of the exponential function e^x $\left[\text{where } e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828\right]$ are expressed by the formulas [1)]

$$de^x = e^x dx, \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{1}$$

(the derivative of the function e^x is equal to the function itself). For an arbitrary base a we have

$$da^x = a^x \ln a\, dx, \quad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \tag{2}$$

In particular,

$$d\,10^x = 10^x \frac{1}{M}dx, \quad \frac{d}{dx}10^x = 10^x \frac{1}{M} \tag{2a}$$

Here, $\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2.3026$.

Example 1.

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}$$

Example 2.

$$d(xe^{-x^2}) = x\,de^{-x^2} + e^{-x^2}dx = xe^{-x^2}d(-x^2) + e^{-x^2}dx = \\ = e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx$$

Example 3.

$$d\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \frac{(e^t+e^{-t})\,d(e^t-e^{-t}) - (e^t-e^{-t})\,d(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2} = \\ = \frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}dt = \frac{4dt}{(e^t+e^{-t})^2}$$

Example 4.

$$d\,7^{t^2} = 7^{t^2}\ln 7d(t^2) = 2t\,7^{t^2}\ln 7\,dt$$

[1)] Formulas (1) and (2) may be obtained by logarithmic differentiation (Sec. 244) or by regarding the exponential function as the inverse of the logarithmic function (Sec. 241).

246. Differentiating Trigonometric Functions [1]

Differentials	Derivatives
I. $d\sin x=\cos x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$,
II. $d\cos x=-\sin x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$,
III. $d\tan x=\frac{dx}{\cos^2 x}$,	$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$,
IV. $d\cot x=-\frac{dx}{\sin^2 x}$,	$\frac{d}{dx}\cot x=-\frac{1}{\sin^2 x}$

These formulas should be memorized. The following two need not be:

V. $d\sec x=\tan x\cdot\sec x\,dx$, $\quad \frac{d}{dx}\sec x=\tan x\cdot\sec x$,

VI. $d\operatorname{cosec} x=-\cot x\cdot\operatorname{cosec} x\,dx$, $\quad \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x=-\cot x\cdot\operatorname{cosec} x$

Example 1.

$$d\sin 2x=\cos 2x\,d(2x)=2\cos 2x\,dx$$

Example 2.

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{\sin 2x}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\sin 2x=\frac{1}{2\sin 2x}\cdot\frac{d}{dx}\sin 2x=\cot 2x$$

Example 3.

$$\frac{d}{d\varphi}\ln\tan\varphi=\frac{1}{\tan\varphi}\cdot\frac{d}{d\varphi}\tan\varphi=\cot\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{2}{\sin 2\varphi}$$

Example 4.

$$\frac{d}{dx}x^{\sin x}=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

This is obtained by logarithmic differentiation (Sec. 244). Putting $y=x^{\sin x}$, we find $\ln y=\sin x\ln x$, whence $\frac{1}{y}\frac{d}{dx}y=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$.

---

[1] For the derivation of formula (I) see Sec. 224, Example 3; formula II is derived in similar fashion. Formulas III and IV are derived by means of the relations

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

247. Differentiating Inverse Trigonometric Functions[1]

Differentials	Derivatives
I. $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
II. $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
III. $d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}$,	$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$,
IV. $d \operatorname{arccot} x = -\frac{dx}{1+x^2}$,	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

These formulas should be memorized. The following two need not be:

V. $d \operatorname{arcsec} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,	$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,
VI. $d \operatorname{arccsc} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Example 1.

$$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (1)$$

Example 2.

$$d \arctan \frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a\,dx}{a^2+x^2} \qquad (2)$$

Example 3.

$$\frac{d}{dx} \arctan \frac{3x+5}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+5}{2}\right) : \left[1+\left(\frac{3x+5}{2}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9x^2+30x+29} = \frac{6}{9x^2+30x+29}$$

Example 4.

$$d \arccos \frac{3}{4x-1} = d\left(\frac{3}{4x-1}\right) : -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4x-1}\right)^2} =$$
$$= -\frac{3\cdot 4\cdot dx}{(4x-1)^2} : -\frac{\sqrt{(4x-1)^2-9}}{|4x-1|} = \frac{6dx}{|4x-1|\sqrt{4x^2-2x-2}}$$

---

[1] Formulas I-VI are derived from the corresponding formulas of Sec. 246 (see Sec. 241).

Note. The function $\arccos\frac{3}{4x-1}$ is only defined for $\left|\frac{3}{4x-1}\right| \leqslant 1$, i.e. either for $x \geqslant 1$ or for $x \leqslant -\frac{1}{2}$. It is not defined in the interval $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$. If one formally substitutes some unsuitable value (say, $x=0$) in the expression of the differential, it will turn out to be imaginary.

247a. Some Instructive Examples

The examples given below serve to illuminate some of the more subtle questions that arise in the differentiation of inverse trigonometric functions.

Example 1.

$$d\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{1+x^2}$$

The expression obtained coincides with the differential of the function $\operatorname{arccot} x$. However, the following equality holds only for positive x:

$$\arctan\frac{1}{x}=\operatorname{arccot} x \tag{1}$$

For negative x we have [1]

$$\arctan\frac{1}{x}-\operatorname{arccot} x=-\pi \tag{2}$$

---

[1] Formula (2) may be readily verified for the point $x=-1$ for which we have

$$\operatorname{arccot} x=\frac{3\pi}{4}, \quad \arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{4}$$

On the other hand, for negative values of x the difference $\arctan\frac{1}{x}-\operatorname{arccot} x$ is constant because its derivative $\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)$ for all $x<0$ is equal to zero (see Sec. 226, Item 1). Consequently, formula (2) holds true for *all negative* values of x; putting $x=+1$ and reasoning in the same way, we are convinced that formula (1) holds true for *all positive* values of x. For $x=0$, the function $\arctan\frac{1}{x}$ is not defined and, hence, does not have a derivative. That is why one cannot assert that the function $\arctan\frac{1}{x}-\operatorname{arccot} x$ is constant *over the entire number line* (cf. Sec. 265, Theorem 1).

For $x=0$ the function $\arctan\frac{1}{x}$ (Fig. 237) is discontinuous $\left(\text{its limit from the left is } -\frac{\pi}{2}\text{, from the right } +\frac{\pi}{2}\text{; cf. Sec. 218}\right)$ and, hence, it is not differentiable, whereas the function $\operatorname{arccot} x$ (Fig. 238) is continuous and its derivative for $x=0$ is -1. The right branch of the graph $y=\arctan\frac{1}{x}$ coincides with the right half of the graph

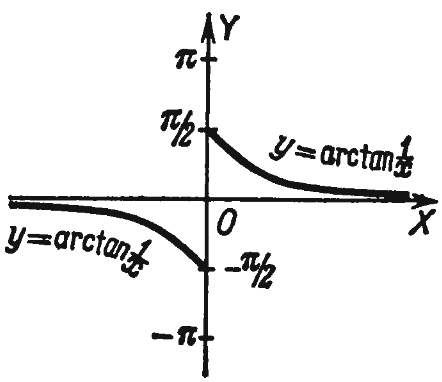


Fig. 237

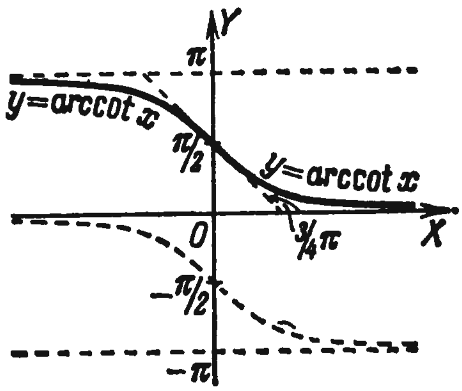


Fig. 238

$y=\operatorname{arccot} x$, while the left branch coincides with the left half of the dashed line in Fig. 238 (this yields the nonprincipal value of the multiple-valued function $y=\operatorname{arccot} x$).

Example 2.

$$\frac{d}{dx}\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right):\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

This expression coincides with the derivative of the function $\arctan x$.

For $x<1$, this function is connected with the given one by the relation [1]

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\arctan x+\frac{\pi}{4} \tag{3}$$

(Fig. 239) and for $x>1$, by the relation

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\arctan x-\frac{3\pi}{4} \tag{4}$$

For $x=1$, the function $\arctan\frac{1+x}{1-x}$ has a discontinuity $AB=\pi$, and does not have a derivative.

Example 3.

$$\frac{d}{dx}\arcsin(\sin x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}\sin x=\frac{\cos x}{|\cos x|}$$

---

[1] The proof is the same as in the preceding footnote of this section.

This derivative is equal to $+1$ when $\cos x > 0$, and to -1 when $\cos x < 0$. For $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, when $\cos x=0$, the derivative does not exist.

Note. In the interval $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ we have $\arcsin(\sin x)=x$, in the interval $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ we have $\arcsin(\sin x)=\pi-x$, in the interval

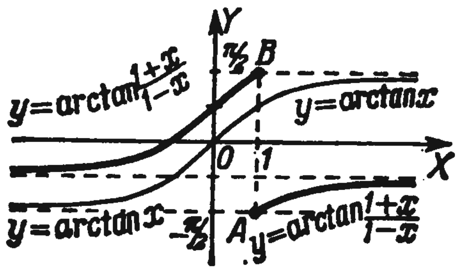


Fig. 239

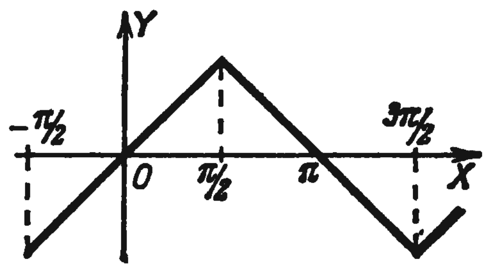


Fig. 240

$\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$ we have $\arcsin(\sin x)=x-2\pi$ and so forth (Fig. 240). Therefore, inside the first interval the derivative is equal to 1, inside the second one, to -1, etc. At the points $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ the derivative has a discontinuity; at each of these points we have one-sided derivatives (cf. Sec. 231, Example 2).

248. The Differential in Approximate Calculations

It often happens that a function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ may be readily calculated for $x=a$, but not for values of x close to a (here, direct computation of the function is difficult). Then use is made of the approximate formula

$$f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h \tag{1}$$

It states that the increment $f(a+h)-f(a)$ of the function $f(x)$ for small values of h is approximately equal[1] to the differential $f'(a)h$ (cf. Sec. 228, Theorem 2).

Below (Sec. 265) a method is indicated for evaluating the error[2] of formula (1), but the evaluation often involves cumbersome computation. For rough calculations, one often confines oneself to formula (1).

---

[1] If $f'(a)=0$, then formula (1) states that the increment in the function is small compared to h; then, for sufficiently small values of h we can take it that $f(a+h)=f(a)$.

[2] See also Sec. 271, Note.

Example 1. Extract the square root of 3654.

Solution. It is necessary to find the value of the function $f(x)=\sqrt{x}$ for $x=3654$. It is easy to compute the values of $f(x)$ and $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ for $x=3600$ Formula (1), for $a=3600$ and $h=54$, yields $\sqrt{3654}\approx 60+\frac{1}{2\cdot 60}\cdot 54\approx 60.45$. Here, all the digits are correct.

Example 2. Find $10^{2.1}$.

Solution. Put $f(x)=10^x$ so that (Sec. 245) $f'(x)=$ $=\frac{1}{M}10^x\left(\frac{1}{M}\approx 2.3026\right)$ For $a=2$, $h=0.1$, formula (1) gives

$$10^{2.1}\approx 100+\frac{1}{M}\cdot 100\cdot 0.1\approx 123.0$$

This result is rather rough (to within the fourth significant digit, $10^{2.1}=125.9$).

If we compute $10^{2.01}$ (now $h=0.01$) in the same fashion, we get 102.3. All the digits are correct.

Example 3. Without using tables, find the value of tan 46°.

Solution. Put $f(x)=\tan x$, $a=45°$, $h=1°=0.0175$ radian; then we have $f'(a)=\frac{1}{\cos^2 45°}=2$. Hence, $\tan 46°\approx 1+2\times$ $\times 0.0175=1.0350$.

Only the last digit is incorrect; from the tables we find $\tan 46°=1.0355$.

It is worth noting the following approximate formulas[1] (α is an infinitesimal):

$$\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha, \qquad \frac{1}{1-\alpha}\approx 1+\alpha; \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\approx 1-2\alpha, \qquad \frac{1}{(1-\alpha)^2}\approx 1+2\alpha; \tag{3}$$

$$\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha, \qquad \sqrt{1-\alpha}\approx 1-\frac{1}{2}\alpha; \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\approx 1-\frac{1}{2}\alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha; \tag{5}$$

$$\sqrt[3]{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{3}\alpha, \qquad \sqrt[3]{1-\alpha}\approx 1-\frac{1}{3}\alpha; \tag{6}$$

---

[1]) Formulas (2)-(6) are special cases of the formula $(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha$, which is obtained from (1) by putting $f(x)=x^n$, $a=1$, $h=\alpha$.

$$\ln(1+\alpha)\approx\alpha, \qquad \ln(1-\alpha)\approx-\alpha; \tag{7}$$

$$e^{\alpha}\approx 1+\alpha, \qquad 10^{\alpha}\approx 1+\frac{1}{M}\alpha; \tag{8}$$

$$\sin\alpha\approx\alpha, \qquad \cos\alpha\approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2,\ \tan\alpha\approx\alpha \tag{9}$$

249. Using the Differential to Estimate Errors In Formulas

Data obtained in measurements contain errors due to inaccuracies in the measuring instruments. The positive number which definitely exceeds the error in absolute value (or, at worst, is equal to this error) is called the *limiting absolute error* or, simply, the *limiting error*. The ratio of the limiting error to the absolute value of the quantity being measured is called the *limiting relative error*.

Example 1. The length of a pencil is measured with a ruler having millimetre divisions. The measurement yields 17.9 cm. The error is not known but it is definitely less than 0.1 cm. Therefore we can take 0.1 cm for the limiting error. The limiting relative error is equal to $\frac{0.1}{17.9}$. Rounding this up we get 0.6%.

Finding the limiting error. Suppose a function y is computed from an exact formula $y=f(x)$, but the value of x is obtained by measurement and therefore contains an error. Then the limiting absolute error $|\Delta y|$ of the function is found from the formula

$$|\Delta y|\approx|dy|=|f'(x)|\,|\Delta x| \tag{1}$$

wnere $|\Delta x|$ is the limiting error of the argument. The quantity $|\Delta y|$ is rounded up (because of the inaccuracy of the formula itself).

Example 2. The side of a square is measured and found to be 46 m. The limiting error is equal to 0.1 m. Find the limiting error for the area of the square.

Solution. We have $y=x^2$ (where x is the side of the square and y is the area). Whence $|\Delta y|\approx 2|x|\,|\Delta x|$. In our example, $x=46$ and $|\Delta x|=0.1$. Hence $|\Delta y|\approx 2\cdot 46\cdot 0.1=9.2$. The limiting absolute error is rounded off to 10 m². The limiting relative error is equal to $\frac{10}{46^2}\approx 0.5\%$.

The limiting relative error $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ may also be found by means of logarithmic differentiation (Sec. 244) by using the formula

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx |d \ln y| \tag{2}$$

In particular, for $y=x^n$ $\left(\text{then } d\ln y=\frac{n\,dx}{x}\right)$ we have

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx n\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \tag{3}$$

that is, the limiting relative error of the power x^n is equal to the n-fold limiting relative error of the argument.

Example 3. Under the hypotheses of Example 2, the limiting relative error of the area is equal to $2\cdot\frac{0.1}{46} \approx 0.5\%$.

Example 4. Measuring the edge of a cube yields $x=12.4$ cm. The limiting error is 0.05 cm. What is the limiting relative error for the volume of the cube?

Solution. The limiting relative error for x is equal to $\frac{0.05}{12.4} \approx 0.004$; for x^3 it is equal to $3\cdot 0.004=0.012$.

Rule 1. The limiting relative error of a product of two or several factors is equal to the sum of the limiting relative errors of the factors.

Rule 2. The limiting relative error of a fraction is equal to the sum of the limiting relative errors of the numerator and denominator.

These rules follow from Secs. 239, 240. [1]

Example 5. In seeking the specific weight of a body, we have found its weight $p=20$ g and the weight of the water it displaces, $v=40$ g. The limiting absolute error for p is 0.5 g, for v it is 1 g. Determine the limiting relative error for the specific weight.

Solution. The specific weight y is equal to $\frac{p}{v}$. We have

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|=\left|\frac{\Delta p}{p}\right|+\left|\frac{\Delta v}{v}\right|=\frac{0.5}{20}+\frac{1}{40}=0.05$$

Example 6. The altitude h and radius of the base r of a cylinder have been measured to within 1%. Find the limiting relative error (1) for the lateral surface S and (2) for the volume V of the cylinder.

---

[1] The formula $d\ln\frac{u}{v}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}$ yields the limiting relative error $\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|$ and not $\left|\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}\right|$ because the quantities $\frac{du}{u}$ and $\frac{dv}{v}$ can have different signs.

Solution. We have $S=2\pi rh$. The factor 2π is an exact number; its error is zero. The relative error for S is $\left|\frac{\Delta S}{S}\right|=$ $=\left|\frac{\Delta r}{r}\right|+\left|\frac{\Delta h}{h}\right|=2\%$ and for $V=\pi r^2h$ it is equal to $2\left|\frac{\Delta r}{r}\right|+$ $+\left|\frac{\Delta h}{h}\right|=3\%$.

250. Differentiation of Implicit Functions

Let an equation relating x and y and satisfied by the values $x=x_0$ and $y=y_0$ define y as an implicit function of x. To find the derivative $\frac{dy}{dx}$ at the point $x=x_0$, $y=y_0$ there is no need to seek the explicit expression of the function. It is sufficient to equate the differentials of both sides of the equation and from the equality obtained to find the ratio $dy:dx$.

Note. An equation connecting x and y can define y as a multiple-valued function $F(x)$ of x. But specifying a pair of values $x=x_0$ and $y=y_0$ isolates one of the many values of the function.

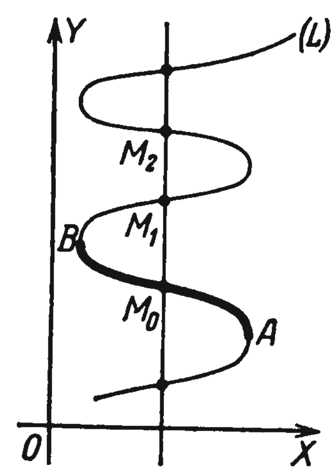


Fig. 241

Geometrically, a straight line parallel to OY (Fig 241) can intersect the curve L at several points M_0, M_1, M_2, ..., but specification of the point M_0 isolates the arc AM_0B (that passes through it) which is a single-valued function.

Example 1. Find the derivative of the implicit function given by the equation $x^2+y^2=25$ at the point $x=4$, $y=-3$.

First method. Solving the equation we get $y=-\sqrt{25-x^2}$ (we choose the minus sign because for $x=4$ we must have $y=-3$). Now we get

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{4}{3}$$

Second method. Equating the differentials of the right and left sides, we obtain

$$2x\,dx+2y\,dy=0$$

whence

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=\frac{4}{3} \tag{1}$$

We have found the slope of the tangent line M_0T to the circle $x^2+y^2=25$ (Fig. 242) at the point $M_0(4, -3)$. The slope of the radius OM_0 is $-\frac{3}{4}$. The product of the slopes is equal to -1, i.e. $OM_0 \perp M_0T$.

Example 2. Find the derivative $\frac{dy}{dx}$ of the implicit function given by the equation[1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

Differentiating, we find

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0$$

whence

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \qquad (3)$$

Equation (2) is an ellipse. By virtue of (3) the slope of the tangent line MT (Fig. 243) is $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. The slope of the diameter MM'

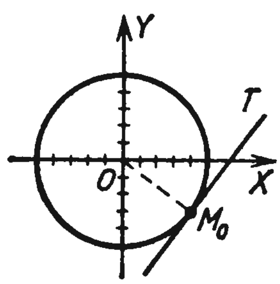


Fig. 242

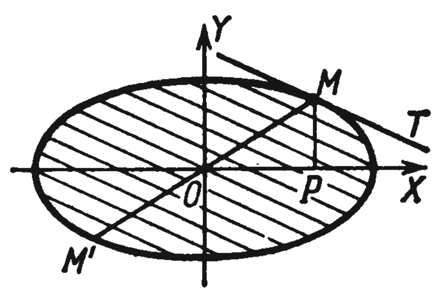


Fig. 243

is $\frac{y}{x}$. The product of the slopes is equal to $-\frac{b^2}{a^2}$. Hence, (Sec. 55), the directions MT and MM' are conjugate, that is to say the diameter MM' bisects the chords parallel to MT.

The diameters of hyperbolas and parabolas possess the same property

251. Parametric Representation of a Curve

Any variable quantity t defining the position of a point on a curve is called a *parameter*.[2] In mechanics, time is most often taken as the parameter.

---

[1] Eq. (2) defines y as a double-valued function of x, but insofar as the values of both variables will be known, one of the two values of the function is taken (cf. Example 1).

[2] The term "parameter" is used in yet another sense to denote a quantity which for a given curve is invariable but changes when moving from one curve of a given type to another. For example, the quantity p in the equation of the parabola $y^2=2px$ is constant for the given parabola but changes when we pass to another parabola.

The coordinates of a point lying on a curve L are functions of the parameter:

$$x=f(t), \tag{1}$$

$$y=\varphi(t) \tag{2}$$

Eqs. (1) and (2) are called the *parametric equations* of the curve L (cf. Sec. 152).

If it is desired to find an equation relating the coordinates x, y of curve L, one has to eliminate t from Eqs. (1) and (2) (see Examples 1 and 2).

It may happen, however, that the equation obtained after eliminating t represents a curve which the curve L covers only in part (see Example 3)

Example 1. Let O (Fig. 244) be the highest position of a material particle thrown at an angle to the horizon, and let t be the time reckoned from the instant of highest elevation. The position of the point M on the trajectory AOB is determined by the quantity t so that t is the parameter. The parametric equations of the trajectory referred to the XOY system are

$$x=OP=v_0t, \tag{3}$$

$$y=PM=-\frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

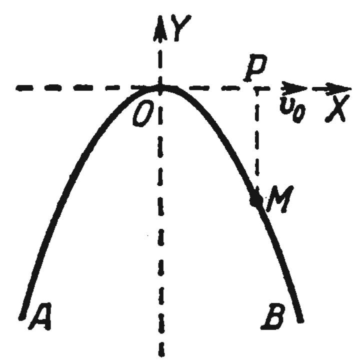


Fig. 244

They state that the point M is in uniform motion with velocity v_0 in the horizontal direction and in uniform accelerated motion (g is the acceleration of gravity) in the vertical direction

Eliminating t we get the equation

$$y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{5}$$

which shows that the motion is along a parabola.

Example 2. The position of a point M on a circle $ABA'B'$ of radius R (Fig. 245) is determined by the magnitude of the angle $\varphi=\angle AOM$ so that φ is the parameter. Setting up axes as shown in Fig. 245, we have the parametric equations of the circle:

$$x = R\cos\varphi, \tag{6}$$

$$y = R\sin\varphi \tag{7}$$

In order to eliminate φ, square (6) and (7) and add:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{8}$$

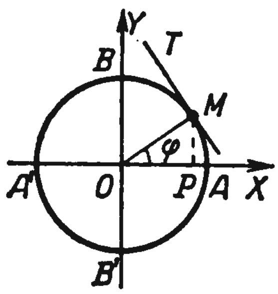


Fig. 245

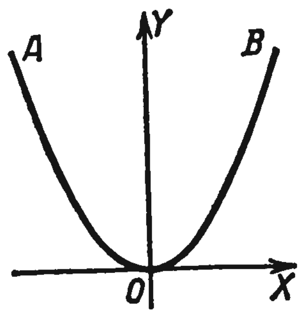


Fig. 246

Example 3. Consider a curve given by the parametric equations

$$x = \sqrt{t}, \quad y = \frac{1}{2}t \tag{9}$$

Eliminating t, we get the equation $y = \frac{1}{2}x^2$ which describes a parabola AOB (Fig. 246). The curve (9) is half of this parabola (OB) corresponding to positive values of x.

252. Parametric Representation of a Function

Let there be given two functions of the argument t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t) \tag{1}$$

Then one of them, say y, is a function of the other.[1] The representation of this function with the aid of equalities (1) is called *parametric*, the auxiliary quantity t being called the *parameter*.

In order to obtain an explicit expression of y as a function of x, one has to solve the equation $x = f(t)$ for t (this is not always possible) and substitute the expression found into the equation $y = \varphi(t)$

[1] As a rule, it is multivalued even when $f(t)$ and $\varphi(t)$ are single-valued.

On the contrary, it is often more convenient to pass from nonparametric representation to parametric. Utilizing the arbitrariness of choice of one of the functions $f(t)$, $\varphi(t)$, we attempt to ensure single-valuedness and, if possible, simplicity of both functions.

The derivative $\frac{dy}{dx}$ is expressed in terms of the parameter t by the formula

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi(t)}{df(t)}=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)} \tag{2}$$

In a parametric representation, both variables x and y are on equal terms (cf. Sec. 251).

Example 1. Given two functions:

$$x=R\cos t, \quad y=R\sin t \tag{3}$$

They specify y parametrically as a double-valued function of x (and conversely). From the first equation we find $\cos t=\frac{x}{R}$ so that $\sin t=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}$. Substituting into the second equation, we get

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2} \tag{4}$$

This is the equation of a circle (cf. Sec. 251, Example 2). The parameter t is the angle XOM (see Fig. 245). The derivative $\frac{dy}{dx}$ expressed in terms of the parameter t is

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(R\sin t)}{d(R\cos t)}=-\cot t \tag{5}$$

This is the slope of the tangent line MT.

Example 2. The equation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

describes an ellipse and specifies a double-valued function $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. To represent it parametrically, one can arbitrarily express one of the variables, say x, as a function of t. Putting $\frac{x}{a}=\cos t$, we find $\frac{y}{b}=\pm\sin t$. The sign may be chosen at will. Let us take the plus sign. We obtain the parametric representation

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t \tag{7}$$

The geometrical meaning of the parameter t is evident from Fig. 247 where ANA' is a circle of radius a and N is a point taken on the same vertical line as point M of the ellipse on the same side[1] of the axis AA'. We have $t = \angle AON$. The derivative $\frac{dy}{dx}$ is expressed in terms of t by the formula

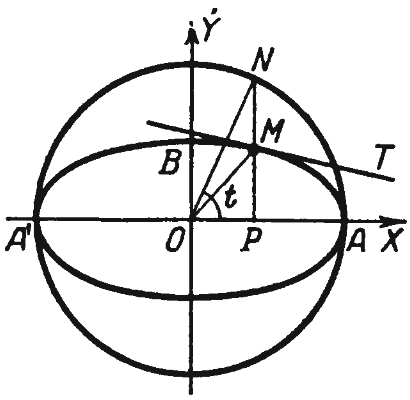


Fig. 247

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(b \sin t)}{d(a \cos t)} = -\frac{b}{a} \cot t$$

This is the slope of the tangent line MT.

Note. The ordinary specification of a function $y=f(x)$ may be regarded as a special case of the parametric representation; namely, it may be written in the form

$$x=t, \quad y=f(t)$$

253. The Cycloid

The *cycloid* is a curve described by a point M on the circumference of a circle rolling (without sliding) along a straight line (*directrix* or *base line*) The rolling circle is called the *generatrix*.

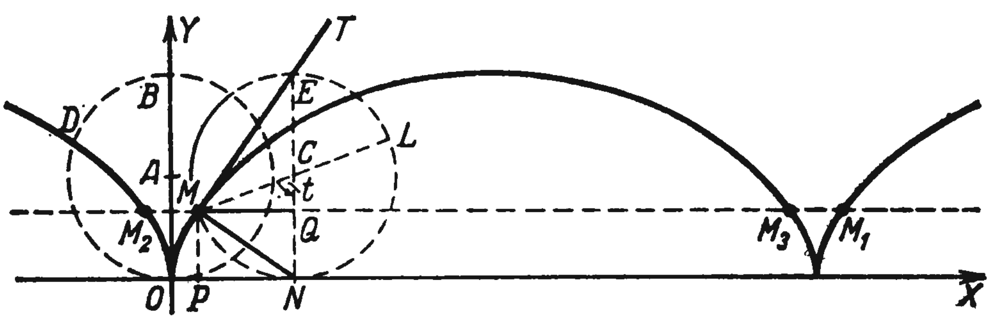


Fig 248

In Fig. 248, the directrix is OX; the generating circle is given in two positions: in the "initial" (ODB) when M touches the directrix and in an "intermediate" position (NME).

Note. The expression "rolls without sliding" means that the point of tangency N is at a distance from the initial position O equal to the arc NM:

$$ON = \overset{\frown}{NM} \tag{1}$$

[1] If we take $\frac{y}{b} = -\sin t$, then N must be taken on the other side.

Parametric equations of the cycloid. If the coordinate axes are as indicated in Fig. 248 and if we take for the parameter the angle $t = \angle MCN$, we get the following parametric equations [1] of the cycloid:

$$x = a(t - \sin t), \tag{2}$$

$$y = a(1 - \cos t) \tag{3}$$

where a is the radius of the generating circle.

If (3) is solved for t and substituted into (2) we get x as an infinitely multiple-valued function of y:

$$x = 2ak\pi \pm \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a-y)}\right) \tag{4}$$

where k is any integer. [2]

The ordinate y is a single-valued, but not an elementary, function of x (see Fig. 248).

The slope k of the tangent line is

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} \tag{5}$$

and the slope k' of the straight line NM is

$$k' = \frac{y - y_N}{x - x_N} = \frac{a(1 - \cos t)}{-a \sin t} \tag{6}$$

Hence, $kk' = -1$, i.e. $MT \perp MN$. Consequently, to construct a tangent line to the cycloid it is sufficient to join M to the highest point of the generating circle (angle NME is a right angle: the angle in a semicircle is a right angle).

254. The Equation of a Tangent Line to a Plane Curve

Let MT (Fig. 249) be a tangent line to the curve L at the point $M(x, y)$. Denote the running coordinates of the point N lying on the tangent line by X, Y.

---

[1] The value of the angle t can be positive or negative and can have any absolute value: for $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ Eqs. (2)-(3) are easily read from Fig. 248:

$$x = OP = ON - PN = NM - MQ = at - a \sin t,$$
$$y = PM = NC - QC = a - a \cos t$$

[2] In Fig. 248, the points M, M_1, etc. are associated with the plus sign in front of the parentheses, the points M_2, M_3, etc., with the minus sign.

For any representation of the curve L (explicit, implicit or parametric) the equation of the tangent line may be written in the following symmetric form:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy} \tag{1}$$

If the curve L is given by the equation $y=f(x)$, then from (1) we obtain [1]

$$Y-y=f'(x)(X-x) \tag{2}$$

If the curve L is given parametrically, we get

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'} \tag{3}$$

where x', y' are derivatives with respect to the parameter.

In an implicit representation of the curve L we equate the differentials of both sides of the equation (cf. Sec. 250) and in the equality obtained replace dx, dy by the proportionate quantities $X-x$, $Y-y$.

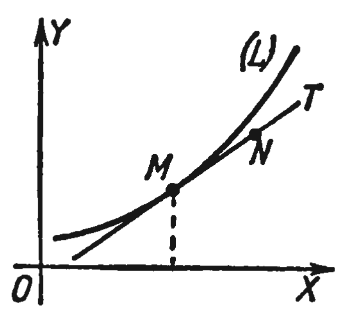


Fig. 249

Example 1. Find the equation of the tangent line to the parabola $y=x^2-3x+2$ at the point (0, 2).

We have $y'=2x-3=-3$. By (2) the desired equation is $Y-2=-3X$.

Example 2. Find the equation of the tangent line to the ellipse

$$x=5\sqrt{2}\cos t, \quad y=3\sqrt{2}\sin t \tag{4}$$

at the point $M(-5, 3)$ (cf. Sec. 252, Example 2).

Solution. To the given point there corresponds the value $t=\frac{3\pi}{4}$. From (4) we have

$$x'=-5\sqrt{2}\sin t=-5, \quad y'=3\sqrt{2}\cos t=-3$$

According to (3), the equation of the tangent line is

$$\frac{X+5}{-5}=\frac{Y-3}{-3}$$

[1] It is assumed that the derivative $f'(x)$ at the point M is finite. However, if $f'(x)=\infty$ (Sec. 231, Case 1), then in place of (2) we have the equation

$$X-x=0$$

(the tangent line is parallel to the axis of ordinates).

i. e.

$$3X-5Y+30=0$$

Example 3. Find the equation of the tangent line to the equilateral hyperbola $xy=m^2$ at the point $\left(\frac{m}{2}, 2m\right)$.

Solution. Equating the differentials of both sides of the equation, we obtain

$$x\,dy+y\,dx=0$$

Replacing dx, dy by the quantities $X-x$, $Y-y$, we get

$$x(Y-y)+y(X-x)=0 \qquad (5)$$

Since $xy=m^2$, it follows that (5) may be rewritten as

$$xY+yX=2m^2 \qquad (6)$$

Substituting $x=\frac{m}{2}$, $y=2m$ into (5) or into (6), we obtain

$$Y+4X=4m$$

254a. Tangent Lines to Quadric Curves

	Equation of curve	Equation of tangent line
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1,$
Hyperbola	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}=1,$
Parabola	$y^2=2px,$	$yY=p(X+x)$

255. The Equation of a Normal

The *normal* at a point M of a curve L (Fig. 250) is the perpendicular MN to the tangent line MT.

According to Eq. (1), Sec. 254, the equation of the normal is of the form

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0 \qquad (1)$$

In accordance with Eqs. (2) and (3), Sec. 254, we obtain the equation of the normal in the following formulas:

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x), \qquad (2)$$

$$(X-x)\,x'+(Y-y)\,y'=0 \qquad (3)$$

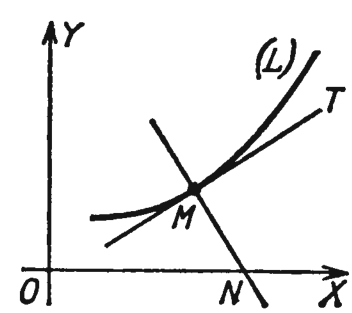


Fig. 250

In an implicit representation of the curve L we equate the differentials of both sides of the equation and eliminate dx and dy by means of (1).

Example 1. Find the equation of the normal to the parabola $y=\frac{1}{2}x^2$ at the point $(-2, 2)$

We have $y'=x=-2$; according to (2) the desired equation is

$$Y-2=\frac{1}{2}(X+2)$$

Example 2. The equation of the normal to the cycloid

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \tag{4}$$

(Sec. 253) is, according to (3), of the form

$$(X-x)(1-\cos t)+(Y-y)\sin t=0 \tag{5}$$

or, utilizing (4),

$$X(1-\cos t)+Y\sin t-at(1-\cos t)=0 \tag{6}$$

This equation is satisfied for $X=at$, $Y=0$; hence, the normal passes (see Fig. 248) through the point $N(at, 0)$ of the generating circle.

Example 3. Find the equation of the normal to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Differentiating, we obtain

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0 \tag{7}$$

Eliminating the differentials from (7) and (1), we get

$$\frac{(X-x)\,y}{b^2}=\frac{(Y-y)\,x}{a^2}$$

256. Higher-Order Derivatives

Let $f'(x)$ be a derivative of the function $f(x)$; then the derivative of the function $f'(x)$ is called the *second derivative* of the function $f(x)$ and is denoted by $f''(x)$.

The second derivative is also called a *second-order derivative*. In contrast, the function $f'(x)$ is called a *first-order derivative*, or the *first derivative*.

A derivative of the second derivative is called the *third derivative* of the function $f(x)$ (or the *third-order derivative*). It is denoted by $f'''(x)$.

In similar manner we define the derivatives of the fourth order $f^{IV}(x)$, fifth order $f^{V}(x)$ and so forth (numbers are used instead of dashes to save space and Roman numerals are used to avoid confusion with exponents).

A derivative of the nth order is symbolized by $f^{(n)}(x)$.

If a function is denoted by a single letter, say y, then its successive derivatives are denoted by

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{IV},\ y^{V},\ \ldots,\ y^{(n)}$$

Example 1. Find the successive derivatives of the function $f(x)=x^4$.

Solution. $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{IV}(x)=24$, $f^{V}(x)=0$.
Subsequent derivatives are also equal to zero.

Example 2. If $y=\sin x$, then

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=-\sin x=\sin(x+\pi),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\ \ldots,\ y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

The values of the derivatives for a given value of the argument $x=a$ are denoted by $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, etc. In Example 1 we have $f'(2)=32$, $f''(2)=48$ and so forth.

Example 3. If $f(x)=\ln(1+x)$, then

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Consequently,

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1,\quad f'''(0)=2!,$$
$$f^{IV}(0)=-3!,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

257. Mechanical Meaning of the Second Derivative

Let a point be in rectilinear motion. Covering a distance s in time t, it acquires a velocity v. Let this velocity change, the increment during the time interval $(t, t+\Delta t)$ being Δv. Then the ratio $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ yields the change in velocity per (average) unit of time and is called the *average acceleration*. This relation describes the rate of change of the velocity at time t the more precisely, the smaller Δt is. Therefore, the *acce-*

leration (at time t) is the limit of the ratio $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ as $\Delta t \to 0$, that is, the derivative $\frac{dv}{dt}$. But the velocity v itself is a derivative: $\frac{ds}{dt}$. Therefore, acceleration is the second derivative of the distance with respect to the time.

Example. The motion of an undamped oscillation of a membrane is given by the equation

$$s = a \sin \frac{2\pi t}{T} \qquad (1)$$

(T is the period of oscillation, a is the amplitude, and s is the deviation of a point of the membrane from the position of rest).

The rate of motion is

$$v = s' = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \qquad (2)$$

The acceleration is

$$v' = s'' = \frac{-4\pi^2 a}{T^2} \sin \frac{2\pi t}{T} \qquad (3)$$

Comparing (2) and (3) we see that

$$s'' = -\frac{4\pi^2}{T^2} s \qquad (4)$$

thus, the elastic force of oscillation (it is proportional to the acceleration by Newton's second law) is proportional to the deviation and has opposite direction.

258. Higher-Order Differentials

Let us consider a number of equidistant values of an argument:

$$x, \ x + \Delta x, \ x + 2\Delta x, \ x + 3\Delta x, \ \ldots$$

and the corresponding values of the function:

$$y = f(x), \quad y_1 = f(x + \Delta x), \quad y_2 = f(x + 2\Delta x),$$
$$y_3 = f(x + 3\Delta x), \ \ldots$$

We introduce the notations

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$\Delta y_1 = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x),$$
$$\Delta y_2 = f(x + 3\Delta x) - f(x + 2\Delta x)$$

etc. The quantities Δy, Δy_1, Δy_2, ... are called the *first differences* of the function $f(x)$. The *second differences* are the quantities $\Delta y_1 - \Delta y$, $\Delta y_2 - \Delta y_1$, etc. They are denoted by $\Delta^2 y$ (read: delta two y), $\Delta^2 y_1$, etc.

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

The *third differences* are defined similarly: $\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$, etc.

Example 1. Let $f(x) = x^3$ and $x = 2$. The first differences will be

$$\Delta y = (2+\Delta x)^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3,$$
$$\Delta y_1 = (2+2\Delta x)^3 - (2+\Delta x)^3 = 12\Delta x + 18\Delta x^2 + 7\Delta x^3,$$
$$\Delta y_2 = (2+3\Delta x)^3 - (2+2\Delta x)^3 = 12\Delta x + 30\Delta x^2 + 19\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

The second differences:

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = 12\Delta x^2 + 6\Delta x^3,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 12\Delta x^2 + 12\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

The third differences:

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = 6\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

For an infinitesimal Δx, the first difference is, as a rule, of first order with respect to Δx, the second difference is of second order, the third, of third order, etc.

In Sec. 228 we called the principal term of the first difference ($12\Delta x$ in Example 1) the differential of the function. We will now call it the *first differential*. The *second differential* is then the principal term of the second difference; it is proportional to Δx^2 ($12\Delta x^2$ in Example 1); the *third differential* is the principal term of the third difference, which term is proportional to Δx^3 ($6\Delta x^3$ in Example 1), etc. Let us formulate this exactly.

Definition. Let the second difference $\Delta^2 y$ of the function $y = f(x)$ be split up into a sum of two terms:

$$\Delta^2 y = B\Delta x^2 + \beta$$

where B is independent of Δx and the term β is of higher order of smallness with respect to Δx^2. Then the term $B\,\Delta x^2$ is called the *second differential* of the function y and is denoted by d^2y or $d^2f(x)$. The differentials of higher orders are defined in similar fashion.

Theorem 1. The coefficient B of Δx^2 in the expression of the second differential is equal to the second derivative $f''(x)$. The coefficient C of Δx^3 in the expression of the third differential $C\,\Delta x^3$ is equal to the third derivative $f'''(x)$, etc.

Example 2. If $f(x)=x^3$, then $f''(x)=6x$. Accordingly, $d^2(x^3)=6x\,\Delta x^2$. For $x=2$ we have $d^2(x^3)=12\Delta x^2$ (cf. Example 1). Further, $f'''(x)=6$ (for any value of x); accordingly, $d^3(x^3)=6\Delta x^3$.

Theorem 1 may be formulated differently as follows.

Theorem 1a. A differential of the nth order is equal to the product of the nth derivative by the nth power of the increment of the independent variable:

$$d^n f(x)=f^{(n)}(x)\,\Delta x^n \tag{1}$$

Since for the independent variable we have

$$\Delta x=dx$$

it follows that

$$d^n f(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n \tag{2}$$[1]

Example 3. $d(x^4)=4x^3\,dx$, $d^2(x^4)=12x^2\,dx^2$, $d^3(x^4)=24x\,dx^3$, $d^4(x^4)=24dx^4$, $d^5(x^4)=0$, $d^6(x^4)=d^7(x^4)=\ldots=0$ (cf. Sec. 256, Example 1).

Example 4. $d^n(\sin x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n$ (cf. Sec. 256, Example 2).

Theorem 2. If we consider the differential dx of the argument x as a quantity independent of x, then the second differential of the function $f(x)$ is equal to the differential of its first differential:

$$d(df(x))=d^2f(x) \tag{3}$$

Under the same condition, the third differential is the differential of the second, etc.

---

[1] If x is not an independent variable, then formula (1) does not, as a rule, hold for any value of n, even for $n=1$ (cf. Sec. 234). But in this case, even formula (2), which is always true for $n=1$, does not, as a rule, hold for differentials of higher order ($n=2, 3, \ldots$). In other words, the expressions $f''(x)\,dx^2$, $f'''(x)\,dx^3$, ... *are not invariant.*

Thus, if $f(x)=x^3$, then the expression $6x\,dx^2$ represents $d^2(x^3)$ when x is an independent variable. But if we put $x=t^2$ and take t instead of x for the independent variable, then $f(x)=t^6$ and we get $6x\,dx^2=24t^4\,dt^2$, whereas $d^2f(x)=30t^4\,dt^2$.

Example 5. Let $f(x)=x^4$ We have $df(x)=4x^3\,dx$. If we consider dx as independent of x, then it must be regarded as a constant when differentiating. Hence, $d(4x^3\,dx)=d(4x^3)\,dx=12x^2\,dx^2$. But this is the second differential of the function x^4 (Example 3). Then $d[d^2(x^3)]=$ $=d(12x^2\,dx^2)=d(12x^2)\,dx^2=24x\,dx^3$; this is the third differential of x^4, etc.

The second differential of a linear function of an independent variable is equal to zero:

$$d^2(ax+b)=0$$

In particular, the second differential of the independent variable is zero: $d^2x=0$.

The third differential of a quadratic function is zero:

$$d^3(ax^2+bx+c)=0$$

Generally, the $(n+1)$th differential of a polynomial of degree n is zero.

259. Expressing Higher Derivatives in Terms of Differentials

The expression of a second derivative in terms of differentials[1] is of the form

$$y''=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3} \tag{1}$$

It holds for any choice of the argument.

If we take x for the argument (then $d^2x=0$), it follows that

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2} \tag{2}$$

This expression also follows from (2), Sec. 258 (for $n=2$). The following expressions are a consequence of the same formula:

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3},\quad y^{\mathrm{IV}}=\frac{d^4y}{dx^4},\quad \ldots,\quad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n} \tag{3}$$

---

[1] We have $y''=\frac{dy'}{dx}$, substitute $y'=\frac{dy}{dx}$; in differentiating apply Theorem 2, Sec. 258.

provided that x is the independent variable. Their general expressions are complicated.[1])

Note. A derivative of the nth order is frequently *denoted by* $\frac{d^n y}{dx^n}$ irrespective of which quantity is taken as the argument. But one *cannot substitute*, into this expression, expressions of the variables y and x in terms of a parameter.

260. Higher Derivatives of Functions Represented Parametrically

Let y be a function of x given by the equations

$$x=\varphi(t), \quad y=f(t) \tag{1}$$

The derivatives of first and second orders are found from the formulas[2])

$$y'=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} \tag{2}$$

$$y''=\frac{\varphi'(t)f''(t)-f'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \tag{3}$$

The expressions of subsequent derivatives are involved;[3]) when the functions $f(t)$ and $\varphi(t)$ are given, the computation is more simply carried out step by step, as in the following example.

Example. Let

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t$$

Then (cf. Sec. 252, Example 2)

$$y'=d(b\sin t):d(a\cos t)=-\frac{b}{a}\cot t$$

---

[1]) We have $y'''=\frac{dy''}{dx}$; substitute expression (1). The result is most conveniently given in the form

$$y'''=\left[dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y\end{vmatrix} - 3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}\right]:dx^5 \tag{4}$$

Subsequent expressions are still more complicated.

[2]) Formula (3) is derived like formula (1), Sec. 259, and may be obtained from the latter by replacing the differentials by the corresponding derivatives with respect to the parameter.

[3]) See footnote 1.

Further

$$y'' = d\left(-\frac{b}{a}\cot t\right):d(a\cos t) = -\frac{b}{a^2\sin^3 t},$$

$$y''' = d\left(-\frac{b}{a^2\sin^3 t}\right):d(a\cos t) = -\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$$

and so forth.

261. Higher Derivatives of Implicit Functions

In order to find the successive derivatives of a function y (of an argument x) given implicitly by some equation, one has to differentiate this equation successively, i. e. equate the differentials (or derivatives) of the right and left sides. We obtain a series of equalities; from the first we find the expression of y in terms of x and y, the second (taking into account the expression of y' that was found) yields the expression of y'' in terms of x and y, the third (taking into account the expressions of y', y'') yields y''', etc. Simplifications are possible in special cases.

Example. Find the derivatives, up to third order, of the function $y = f(x)$ given by the equation

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

and determine the values of these derivatives at the point (3, 4).

Solution. Equating the differentials, we obtain

$$x\,dx + y\,dy = 0 \tag{2}$$

whence

$$x + yy' = 0 \tag{2a}$$

Equating the differentials of both sides of (2a), we get

$$dx + y'\,dy + yy''\,dx = 0 \tag{3}$$

whence

$$1 + y'^2 + yy'' = 0 \tag{3a}$$

We differentiate once again

$$2y'\,dy' + y''\,dy + yy'''\,dx = 0 \tag{4}$$

whence

$$3y'y'' + yy''' = 0 \tag{4a}$$

From (2a) we get

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{5}$$

From (3a) we get $y''=-\frac{1+y'^2}{y}$; taking into account (5), we have

$$y''=-\frac{x^2+y^2}{y^3} \tag{6}$$

From (4a), taking into account (5) and (6), we get

$$y'''=\frac{-3x(x^2+y^2)}{y^5} \tag{7}$$

Substituting $x=3$, $y=4$ into (5), (6) and (7), we get

$$y'=-\frac{3}{4}, \quad y''=-\frac{25}{64}, \quad y'''=-\frac{225}{1024}$$

Note 1. Here the computation may be simplified. By virtue of the equation $x^2+y^2=25$, formula (6) takes the form $y''=-\frac{25}{y^3}$ From this $y'''=-\frac{d}{dx}\left(\frac{25}{y^3}\right)=\frac{75}{y^4}y'=-\frac{75x}{y^5}$.

Note 2. There is no need to derive (3a) from (3), (4a) from (4), etc. The derivatives may be taken at once. However, a preliminary calculation of the differentials is a guarantee against certain mistakes common to beginners (for the derivative of y'^2, they write $2y'$ in place of $2y'y''$ and so on; cf. Sec. 238, Note).

262. Leibniz Rule

In order to form the expression of the nth derivative of the product uv (with respect to any argument), expand $(u+v)^n$ by the binomial theorem (Newton's) and in the expansion obtained replace all powers by derivatives of the appropriate order, zero powers ($u^0=v^0=1$) that are assumed in the extreme terms of the expansion being replaced by the functions themselves.

By this rule we get

$$(uv)'=u'v+uv', \tag{1}$$

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'', \tag{2}$$

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''', \tag{3}$$

. . . .

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)} \tag{4}$$

This rule, which was perceived by Leibniz, is proved by the method of complete mathematical induction.

Example 1. Find the tenth derivative of the function $e^x x^2$.

Solution. Using formula (4) (for $u=e^x$, $v=x^2$, $n=10$) we get

$$(e^x x^2)^{\mathrm{X}}=(e^x)^{\mathrm{X}} x^2+10\,(e^x)^{\mathrm{IX}}\,(x^2)'+45\,(e^x)^{\mathrm{VIII}}\,(x^2)''+\ldots$$

The subsequent terms need not be written out since the derivatives of x^2 of third and higher orders are equal to zero. Taking into account that all the derivatives of e^x are equal to e^x, we obtain

$$(e^x x^2)^{\mathrm{X}}=e^x\,(x^2+20x+90)$$

Example 2. Find the values of all derivatives of $f(x)=\arctan x$ for $x=0$.

Solution. We have

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{5}$$

so that

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1 \tag{6}$$

The direct computation of higher derivatives is an involved operation. But if we represent (5) in the form

$$f'(x)\,(1+x^2)=1$$

and apply the Leibniz rule ($u=f'(x)$, $v=1+x^2$), we get

$$f^{(n+1)}(x)\,(1+x^2)+nf^{(n)}(x)\,2x+n\,(n-1)\,f^{(n-1)}(x)=0$$

For $x=0$ we have

$$f^{(n+1)}(0)+n\,(n-1)\,f^{(n-1)}(0)=0 \tag{7}$$

Since $f^{(0)}(0)=f(0)=0$, the values of all the derivatives of even order are equal to zero:

$$f''(0)=f^{\mathrm{IV}}(0)=f^{\mathrm{VI}}(0)=\ldots=0 \tag{8}$$

Since $f'(0)=1$, from (7) we get, successively,

$$\begin{aligned}
f'''(0)&=-1\cdot 2f'(0)=-(2!),\\
f^{\mathrm{V}}(0)&=-3\cdot 4f'''(0)=+(4!),\\
f^{\mathrm{VII}}(0)&=-5\cdot 6f^{\mathrm{V}}(0)=-(6!),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(2k+1)}(0)&=-(2k-1)\,2kf^{(2k-1)}(0)=(-1)^k\,(2k!)
\end{aligned}$$

263. Rolle's Theorem [1]

Theorem. Let a function $f(x)$, differentiable in a closed interval (a, b), vanish at the end-points of the interval. Then the derivative $f'(x)$ will vanish at least once inside the interval.

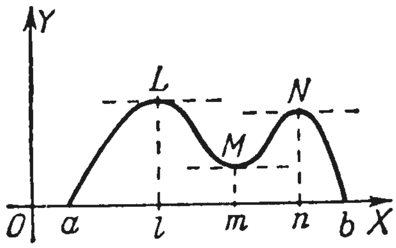


Fig. 251

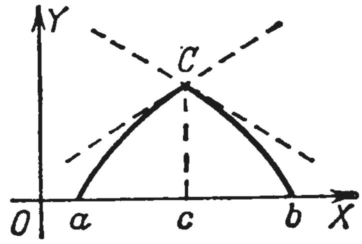


Fig. 252

In Fig 251, between the points $x=a$ and $x=b$, where the curve of the function $f(x)$ cuts the x-axis, there are three points L, M and N where the tangent is parallel to the x-axis [i. e. $f'(x)=0$].

In Fig. 252, between $x=a$ and $x=b$ there is not a single point with "horizontal" tangent. The reason is that at the point C the graph has no tangent, i. e. the function $f(x)$ is not differentiable at the point $x=c$ (there are two one-sided derivatives here, Sec. 231).

Note 1. If a differentiable function $f(x)$ has the same values at $x=a$ and $x=b$, even though not equal to zero, then the derivative $f'(x)$ still vanishes in the interior of the interval (a, b).

Note 2. Rolle's theorem also holds true even in the case when $f(x)$ is differentiable only at interior points of the interval (a, b); at the end-points, the function $f(x)$ may not be differentiable but only continuous.

Rolle's theorem is ordinarily stated for these most general conditions; this complicates the statement of the theorem and makes it difficult to grasp the *basic* content. Later on (Secs. 264, 266, 283) we will state the conditions of a number of theorems under less than the most general assumptions (which are given as notes)

---

[1] M. Rolle (1652–1719), a contemporary of Newton and Leibniz, considered differential calculus to be logically inconsistent and, naturally, could not have stated "Rolle's theorem". Rolle stated an algebraic theorem from which follows the consequence: if a and b are roots of the equation $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$, then between a and b there is a root of the equation $nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}=0$. This proposition is a special case of "Rolle's theorem" (the left side of the second equation is the derivative of the left side of the first equation). Hence the name (historically inaccurate) "Rolle's theorem".

264. Lagrange's Mean-Value Theorem [1]

Statement of the theorem. If a function $f(x)$ is differentiable in a closed interval (a, b), then the ratio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ is equal to the value of the derivative $f'(x)$ at some interior point $x=\xi$ [2] of the interval (a, b):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \tag{1}$$

Geometrical interpretation. The ratio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{KB}{AK}$ (Fig. 253) is the slope of the chord AB, and $f'(\xi)$ is the

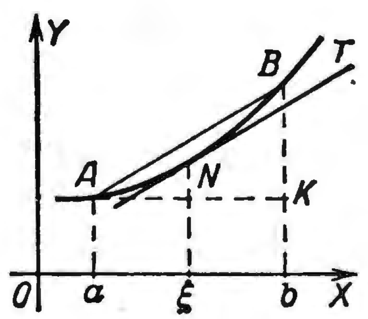


Fig. 253

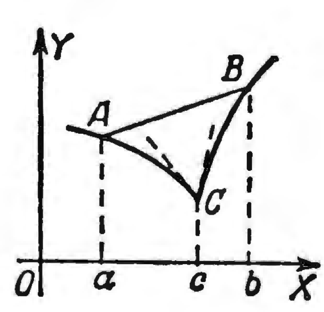


Fig. 254

slope of the tangent NT. Lagrange's theorem asserts that there is at least one point N between A and B on the arc $\overset{\frown}{AB}$ where the tangent is parallel to the chord AB, provided that there is a tangent at *every point* of the arc $\overset{\frown}{AB}$.

From Fig. 254 it is clear that if this condition is not fulfilled the theorem may not hold true. There is no tangent at point C (there are only one-sided tangents: right and left). The function $f(x)$ depicted by the graph ACB is nondifferentiable at $x=c$, and the Lagrange theorem does not hold true: the derivative $f'(x)$ is not equal to the ratio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ for any intermediate value ξ.

---

[1] Lagrange, Joseph Louis (1736-1813), great French scientist, founder of analytical mechanics, one of the creators of the calculus of variations.

[2] The Greek letter ξ (xi) is the standard notation for the "mean value" of an argument (i. e. the value contained within a given interval).

Mechanical interpretation. Let $f(t)$ be the distance of a point at time t from an initial position. Then $f(b)-f(a)$ is the distance covered from time $t=a$ to time $t=b$, the ratio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ is the average velocity during this interval of time. The Lagrange theorem asserts that at some intermediate time the velocity of the point is equal to the average (mean) velocity of motion provided that at each instant the point has a definite velocity.

The theorem may not hold if this condition is not fulfilled. For example, if a point moves the first hour at 20 metres an hour, and the second at 30 m/hr, then the mean velocity of motion is 25 m/hr; the point did not have that velocity once during the two hours. The theorem was violated because at the end of the first hour the point did not have a definite velocity. [1]

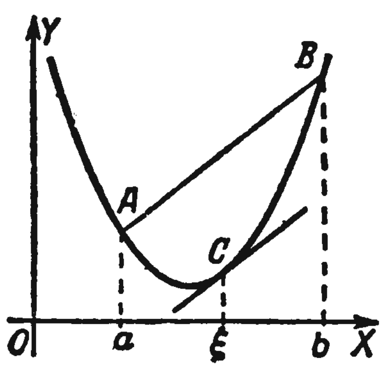


Fig. 255

An alternative statement of the Lagrange theorem. The equation

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(if the conditions of the theorem are fulfilled) has at least one root $x=\xi$ within the interior of the interval (a, b).

The position of this root (or roots) depends on the type of function $f(x)$. If it is a quadratic function (and the graph is a parabola; Fig. 255), we obtain a first-degree equation; its root lies precisely at the midpoint of (a, b), or

$$\xi=\frac{b+a}{2}$$

For other functions, this property is only approximately fulfilled; namely, if a has a constant value and b tends to a, then one of the roots, as a rule, [2] tends to the midpoint of the interval (a, b), i. e. $\lim \frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}$ as $b \to a$.

Example 1. Let $f(x)=x^2$. Then $f'(\xi)=2\xi$. Formula (1) takes the form

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=2\xi$$

---

[1] Actually, the transition from 20 m/hr to 30 m/hr ordinarily takes place gradually, not instantaneously, and then there is an instant when the velocity is equal to 25 m/hr.

[2] The only exceptions are cases when the second derivative $f''(a)$ is zero or does not exist.

whence

$$\xi = \frac{a+b}{2}$$

i e. ξ lies exactly at the midpoint of the interval (a, b).

Example 2. Let $f(x) = x^3$, then $f'(x) = 3x^2$. Take $a = 10$, $b = 12$. We then have

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 364$$

According to Lagrange's theorem, the equation $3x^2 = 364$ should have a root between 10 and 12. Indeed, its positive root $x = \sqrt{121\frac{1}{3}} \approx 11.015$ lies in the interval (10, 12) and, what is more, very close to the midpoint.

Note. The Lagrange theorem also holds true when the function $f(x)$ is differentiable only at interior points of the interval (a, b) (being nondifferentiable and only continuous at the end-points).

265. Formula of Finite Increments

Formula (1), Sec. 264, may be rewritten as

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \tag{1}$$

or, in other notation,

$$f(a+h) - f(a) = f'(\xi) h \tag{2}$$

This is the *formula of finite increments*, which is also written as

$$f(a+h) = f(a) + f'(\xi) h \tag{3}$$

Application to approximate calculations. In Sec. 248 we employed the approximate formula

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) h \tag{4}$$

to compute $f(a+h)$. The *exact* formula (3) enables us (though the value of ξ is unknown) to estimate the error in formula (4). Now if we put $\xi = \frac{a+b}{2}$ in formula (3), then as a rule (cf. Sec. 264) it yields a much better approximation than (4), though it ceases to be exact.

Example. Find log 101 without using tables.

Assuming $f(x) = \log x$, we have $f'(x) = \frac{M}{x}$ $(M = 0.43429)$. For $a = 100$ and $h = 1$, formula (4) yields

$$\log 101 \approx \log 100 + M \cdot \frac{1}{100} \cdot 1 = 2.0043429 \tag{5}$$

To estimate the error, use the exact formula (3). This yields

$$\log 101 = \log 100 + M \cdot \frac{1}{\xi} \cdot 1 \tag{6}$$

Here, ξ lies between 100 and 101, so that $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{101}$. The error of formula (5) is $M\left|\frac{1}{100} - \frac{1}{\xi}\right|$ and this is definitely less than $M\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$; that is to say, it is less than 0.00004. Such is the limiting error of formula (5) (the true error is half that).

But if in formula (6) we put $\xi = \frac{1}{2}(100 + 101) = 100.5$, then we get

$$\log 101 \approx \log 100 + M \cdot 0.00995025 \cdot 1 = 2.0043213 \tag{7}$$

Here only the last digit is incorrect; its true value is greater by unity.

Corollaries to formula (1). From the definition of a derivative it follows directly that the derivative of a constant is zero. A consequence of formula (1) is the following inverse theorem.

Theorem 1. If in an interval (m, n) the derivative $f'(x)$ is everywhere equal to zero, then in this interval the function $f(x)$ is a constant [i. e. for any values (a, b) in this interval[1] the values of the function $f(x)$ are the same].

Explanation. By hypothesis, the function $f(x)$ is differentiable in the interval (m, n) and all the more so in the interval (a, b). Hence, we can apply to it (Sec. 264) formula (1). In (1) we have to put $f'(\xi) = 0$ (by hypothesis). This yields $f(b) = f(a)$.

From Theorem 1 there follows directly

Theorem 2. If the derivatives of two functions $f(x)$ and $\varphi(x)$ are everywhere equal in an interval (m, n), then *in this interval* the values of both functions differ by a constant quantity.

---

[1] By hypothesis, the function $f(x)$ is defined *throughout* the interval (m, n), otherwise it would not have a derivative everywhere. If, contrary to hypothesis, $f(x)$ is defined at all points of (m, n) except, say, two points $x = k$ and $x = l$ $(k < l)$, then it may turn out that the function is constant only in each of the (open) intervals (m, k), (k, l) and (l, n) *separately*, but changes its value when passing from one to another (see Examples 1 and 2, Sec. 247a).

266. Generalized Mean-Value Theorem (Cauchy)

Cauchy's theorem.[1] Let the derivatives $f'(t)$ and $\varphi'(t)$ of two functions $f(t)$ and $\varphi(t)$, differentiable in a closed interval (a, b), not be simultaneously zero anywhere in the interior of the interval. Also let one of the functions $f(t)$, $\varphi(t)$ have distinct values at the end-points of the interval [say $\varphi(a) \neq \varphi(b)$]. Then the increments $f(b)-f(a)$ and $\varphi(b)-\varphi(a)$ of the given functions are to each other as their derivatives at some interior point $t=\tau$ (Greek letter tau) of the interval (a, b):

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)} \tag{1}$$

Lagrange's formula [formula (1), Sec. 264] is a special case of formula (1) when $\varphi(t)=t$.

Geometrical interpretation. Same as for Lagrange's theorem, only the curve ACB (Fig. 256) is given by the parametric equations

$$x=\varphi(t), \quad y=f(t)$$

We have

$$OA'=\varphi(a), \quad OB'=\varphi(b);$$
$$AA'=f(a), \quad BB'=f(b)$$

The ratio $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ is the slope of the chord AB, the ratio $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{dy}{dx}$ is the slope of the tangent NT.

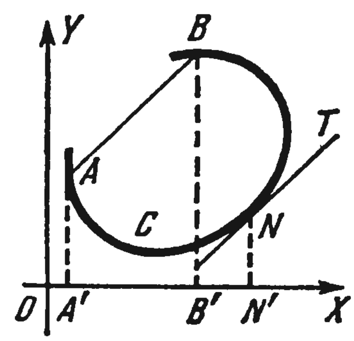


Fig. 256

In Fig. 256, the tangent NT is parallel to the chord AB, the point N lies on the arc AB (but its projection N' on the x-axis does not lie on the segment $A'B'$; the same goes for the projection on the y-axis).

Note 1. If, contrary to hypothesis, we had $f(a)=f(b)$ and $\varphi(a)=\varphi(b)$, then the left side of (1) would be indeterminate.

Note 2. The Cauchy theorem requires that $f'(t)$ and $\varphi'(t)$ should not be zero simultaneously *in the interior* of the interval (a, b), but at one of the end-points (or at both) they can simultaneously be zero (or even not exist, so long as $f(x)$ and $\varphi(x)$ are continuous at both end-points).

Example 1. Consider the functions

$$f(t)=t^3 \quad \text{and} \quad \varphi(t)=t^2$$

in the interval (0, 2). At the end-point $t=0$, the derivatives

$$f'(t)=3t^2 \quad \text{and} \quad \varphi'(t)=2t$$

vanish, but both are nonzero in the interior of the interval. Each of the functions $f(t)$, $\varphi(t)$ has distinct values at the end-points $t=0$ and $t=2$. The conditions of the Cauchy theorem are fulfilled. Hence the

---

[1] Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857), celebrated French mathematician and physicist. Cauchy posed the problem of constructing mathematical analysis on a rigorous logical basis. In the main, he solved this problem.

ratio

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)}=\frac{2^3}{2^2}=2$$

must be equal to the ratio

$$\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

at some point $t=\xi$ lying between $a=0$ and $b=2$. Indeed, the equation

$$\frac{3}{2}t=2$$

has a root $t=\frac{4}{3}$, which lies in the interior of the interval (0, 2).

Example 2. Consider the same functions $f(t)=t^3$ and $\varphi(t)=t^2$ in the interval $\left(-1\frac{1}{2},\ 2\right)$. For $a=-1\frac{1}{2}$, $b=2$ we have

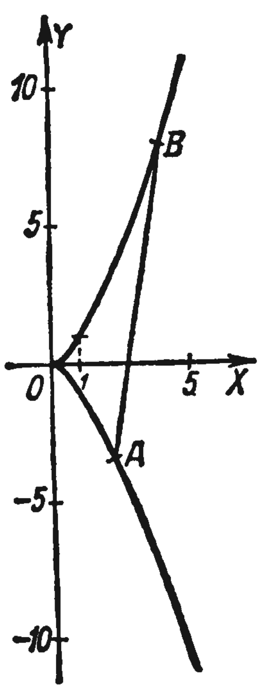


Fig. 257

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{b^2+ab+a^2}{b+a}=\frac{13}{2}$$

The equation

$$\frac{3}{2}t=\frac{13}{2}$$

has a unique root $t=4\frac{1}{3}$, but it is exterior to the interval $\left(-1\frac{1}{2},\ 2\right)$. The Cauchy theorem did not hold because the point $t=0$, where both derivatives $f'(t)$, $\varphi'(t)$ are equal to zero, now lies inside the interval (a, b). Geometrically, the picture is as follows: the parametric equations $x=t^2$, $y=t^3$ describe a semicubical parabola AOB (Fig. 257); to the values $a=-1\frac{1}{2}$, $b=2$ there correspond points $A\left(2\frac{1}{4},\ -3\frac{3}{8}\right)$ and B (4, 8). On the arc AOB of the curve $x=t^2$, $y=t^3$ (semicubical parabola) there are no points where the tangent could be parallel to the chord AB (such a point exists outside the arc AB above point B).

Mechanical Interpretation. Let t be the time and

$$s_P=f(t)$$

and

$$s_Q=\varphi(t)$$

be the distances of two rectilinearly moving bodies P and Q from their initial positions. Then $f'(t)$ and $\varphi'(t)$ are the velocities v_P and v_Q of the bodies P and Q. By the hypothesis of the Cauchy theorem, v_P and v_Q are not zero simultaneously. The theorem states that the distances covered by the bodies in the time interval (a, b) are to one another as the velocities at some intermediate instant [1] (the same for both bodies).

267. Evaluating the Indeterminate Form $\frac{0}{0}$

If some function is not defined at a point $x=a$, but has a limit as $x \longrightarrow a$, then finding this limit is called *evaluating the indeterminate form*. In particular, evaluating the indeterminate form $\frac{0}{0}$ is the name for finding the limit of the ratio $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ when the functions $f(x)$, $\varphi(x)$ are infinitesimal as $x \longrightarrow a$.

L'Hospital's rule.[2] To find the limit of the ratio $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ of two functions which are infinitesimal as $x \longrightarrow a$ (or as $x \longrightarrow \infty$), we can consider the ratio of their derivatives $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. If it tends to a limit (finite or infinite), then the ratio $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ also tends to that limit.[3]

---

[1] Let us explain this pictorially. Suppose during the time interval (a, b) body P covers twice the distance that Q does $(s_P=2s_Q)$ If both motions are uniform, then at *any* intermediate time we have $v_P=2v_Q$. Now let one of the motions (or both of them) be nonuniform. It cannot be that, always, $v_P > 2v_Q$ (for then the distance covered by P would exceed that covered by Q by more than a factor of two). Likewise, it is impossible that, always $v_P < 2v_Q$. Therefore, if at first v_P exceeds $2v_Q$, then later v_P is less than $2v_Q$ (and vice versa). Hence, at some intermediate time we must have that $v_P=2v_Q$. At that time we have $v_P:v_Q=s_P:s_Q$ because by hypothesis the case when $v_P=v_Q=0$ is excluded (for then the ratio $v_P:v_Q$ would be indeterminate).

[2] L'Hospital (1661-1704), author of the first printed manual on differential calculus (1696) where the rule is formulated (but less rigorously than as given here). In compiling this manual, l'Hospital made use of the manuscript of his teacher John Bernoulli. This rule is mentioned in the manuscript and so the name "l'Hospital's rule" is historically inaccurate.

[3] In the statement of the rule, the requirement is ordinarily included that the derivative $\varphi'(x)$ be nonzero in some neighbourhood of the point $x=a$. This requirement is superfluous since the rule itself states that the ratio $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ has a limit as $x \longrightarrow a$, and by virtue of the definition of limit (Sec. 205) this is only possible when $\varphi'(x) \neq 0$ near $x=a$.

Example 1. Evaluate $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

The functions $f(x)=x^2-1$ and $\varphi(x)=x^3-1$ are infinitesimal as $x \longrightarrow 1$. Consider the ratio $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{2x}{3x^2}$. It approaches the limit $\frac{2}{3}$ as $x \longrightarrow 1$. According to the l'Hospital rule, $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ tends to the same limit. Indeed,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$$

If not only the functions $f(x)$, $\varphi(x)$, but also their derivatives $f'(x)$, $\varphi'(x)$ are infinitesimal as $x \longrightarrow a$, then one can again apply the l'Hospital rule in order to find the limit of $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Example 2. Evaluate $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

The numerator and denominator are infinitesimal. By the l'Hospital rule

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

Here the numerator and denominator are again infinitesimals. Apply the l'Hospital rule once again:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

Example 3. Find $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

Using the l'Hospital rule successively, we twice get a ratio of infinitesimals:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}, \quad \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

The third time we obtain the ratio

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

It has the limit 2 as $x \to 0$. Hence,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$$

Note 1. Theoretically, the possibility is not precluded that all derivatives of both functions $f(x)$, $\varphi(x)$ will be infinitesimals. Such cases do not occur in real-world problems.

It is useful to combine the application of l'Hospital's rule with transformations that facilitate finding the limit.

Example 4. Find $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Following the l'Hospital rule, we seek the limit of the ratio

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} \text{ as } x \to 0$$

Here, $f'(x)$ and $\varphi'(x)$ are infinitesimals, but it is not advisable to seek $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$. It is better to transform $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ to the form $\frac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ and, noting that $\lim\limits_{x \to 0} (\cos^2 x) = 1$, to seek $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x}$. By l'Hospital's rule, this limit is equal to

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{6 \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

From the very start we can replace $\sin^3 x$ with the equivalent infinitesimal x^3. Then

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2 \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2}$$

Using the l'Hospital rule again, we get

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{6x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

Note 2. It may happen that the ratio $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ does not tend to any limit as $x \to a$ (or as $x \to \infty$). In such cases, the ratio $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ may likewise have no limit, but on the other hand it may have one. Thus, if

$f(x)=x+\sin x$ and $\varphi(x)=x$, then the ratio $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1+\cos x$ has no limit as $x\to\infty$. However, the ratio

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x}$$

approaches unity as $x\to\infty$.

268. Evaluating the Indeterminate Form $\frac{\infty}{\infty}$

L'Hospital's rule (Sec. 267) also holds true for the ratio $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ of two functions which are infinitely great as $x\to a$ (or as $x\to\infty$).

Example 1. Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

The functions $f(x)=\ln x$ and $\varphi(x)=x^2$ become infinite as $x\to\infty$. The ratio $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{2x}$ tends to the limit 0 as $x\to\infty$. $\frac{\ln x}{x^2}$ tends to the same limit.

Note. If $f(x)$ and $\varphi(x)$ have infinite limits as $x\to a$, then the limits of $f'(x)$ and $\varphi'(x)$ (if they exist) are also infinite, and l'Hospital's rule is useful only when the expression $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ can be reduced to a more convenient form in simpler fashion than the expression $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Example 2. Evaluate $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}$.

The functions $\tan 3x$ and $\tan x$ and also their derivatives $\frac{3}{\cos^2 3x}$ and $\frac{1}{\cos^2 x}$ become infinite as $x\to\frac{\pi}{2}$. Representing the ratio of the derivatives in the form $3\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$, we seek $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}$ (now the numerator and denominator are infinitely small). Applying the rule of Sec. 267, we get $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-3\sin 3x}=-\frac{1}{3}$. Consequently,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

But the original expression is more readily transformed to a convenient form. Namely, $\frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{\cot x}{\cot 3x}$ so that

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 3x}{3 \sin^2 x} = \frac{1}{3}$$

269. Other Indeterminate Expressions

I. *Indeterminate form* $0 \cdot \infty$, i.e. the product $f(x)\varphi(x)$ where $f(x) \to 0$ and $\varphi(x) \to \infty$. This expression may be reduced to the form $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x)\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)} = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)}$$

and then the l'Hospital rule can be employed.

Example 1. Find $\lim_{x \to 0} x \cot \frac{x}{2}$.

We transform $x \cot \frac{x}{2} = x : \tan \frac{x}{2}$ and find

$$\lim_{x \to 0} x \cot \frac{x}{2} = \lim_{x \to 0} \left[1 : \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\right] = 2$$

Example 2. Find $\lim_{x \to 0} x^4 \ln x$.

We have

$$\lim_{x \to 0} x^4 \ln x = \lim_{x \to 0} \left[\ln x : \frac{1}{x^4}\right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} : \frac{-4}{x^5}\right] = 0$$

II. *Indeterminate form* $\infty - \infty$, i.e. the difference of two functions each of which has the limit $+\infty$ (or the limit $-\infty$). This expression is also reduced to the form $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$.

Example 3. Evaluate $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

Reduce the fractions to a common denominator; the desired quantity is $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x(e^x+1)}$, i.e. we have the indeterminate form $\frac{0}{0}$. Since $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)=2$, it follows that

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{2}$$

III. *Indeterminate forms* 0^0, ∞^0, 1^∞, i.e. functions of the form $f(x)^{\varphi(x)}$, where $\lim f(x)=0$ and $\lim\varphi(x)=0$ or $\lim f(x)=\infty$, $\lim\varphi(x)=0$ or $\lim f(x)=1$, $\lim\varphi(x)=\infty$.

Here we first seek the limit of the logarithm of the given function. In all three cases, we obtain an indeterminate form like $0\cdot\infty$.

Example 4. Evaluate $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ (indeterminate form 0^0).

Assuming $y=x^x$, we have $\ln y=x\ln x$. Further,

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\left(\ln x:\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}:-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Whence

$$\lim_{x\to 0} y=1$$

Example 5. Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (indeterminate form ∞^0).

Assuming $y=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, we have $\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+2x)$. Further,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+2x}=0$$

Hence, $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$.

Example 6. Evaluate $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ (indeterminate form 1^∞).

We have

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin x\cos x}:-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)=-1$$

Hence

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}$$

270. Taylor's Formula (Historical Background) [1]

1. **Newton and infinite series.** In order to find the derivative of a given function and, mainly, to solve the inverse problem, Newton replaced the given function by an *infinite power series*, i.e. the expression

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

with the number of terms increasing without bound. The coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ were taken so that expression (1) yielded more exact values of the function as the number of terms was increased. Thus, Newton replaced the function $\frac{1}{1+x}$ by the expression $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$ and wrote:[2]

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (2)$$

If $|x| < 1$, then the terms $1, -x, x^2, \dots$ form an infinite decreasing geometric progression, and the sum is equal to $\frac{1}{1+x}$. But if $|x| \geqslant 1$, then the sum $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ $\dots + (-1)^n x^n$, as $n \to \infty$, does not tend to $\frac{1}{1+x}$. Taking into account this circumstance, Newton always confined himself to sufficiently small values of x.

---

[1] The present section serves as an introduction to Secs. 271 and 272; the latter may be read independently.

[2] The expansion (2) is obtained if to the quotient $1:(1+x)$ we apply the rule for dividing polynomials arranged in increasing powers. Prior to Newton, formula (2) was used by N. Mercator (in 1665) in the computation of logarithms $\left[\text{the derivative of } \ln(1+x) \text{ is equal to } \frac{1}{1+x}\right]$. Mercator confined the infinite series expansion to this single case. In the hands of Newton it became a general method.

In expanding functions in infinite series, Newton made use of a variety of devices. Thus, Newton took the formula

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \quad (3)$$

which had earlier been established by Pascal [1] for positive integral m, and applied it to fractional and negative values of m. Then the number of terms increases without bound. For $m=-1$ we get formula (2), for $m=-2$ we have [2]

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \quad (4)$$

In order to find the derivative of $\frac{1}{1+x}$, Newton differentiated the expression (2) termwise. [3] A comparison with (4) shows that

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]' = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad (5)$$

2. **Taylor's series.** In 1715 Taylor, [4] using a complicated and extremely nonrigorous method, found a general form of expression (1) for the given function $f(x)$. In present-day notation, the result is of the form

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \quad (6)$$

Thus, if $f(x) = \frac{1}{1+x}$, then $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Hence, $f(0) = 1$ and $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n$ so that formula (6) yields the expansion (2). If $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, we get the expansion (4).

---

[1]) Blaise Pascal (1623-1662), celebrated French philosopher, mathematician and physicist.

[2]) Realizing that his derivations were not rigorous, Newton verified them by means of examples. Thus, performing termwise multiplication of $(1-x+x^2-x^3+\ldots)\times(1-x+x^2-x^3+\ldots)$, he found $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ and in this way checked formula (4).

[3]) Newton did not know that the theorem on the derivative of a sum might prove invalid for a boundlessly increasing number of terms. Incidentally, for a series like (1) this theorem (given sufficiently small values of x) holds true, so there were no mistakes.

[4]) Brook Taylor (1685-1731), English mathematician, pupil of Newton.

3. **Maclaurin's derivation.** Thirty years later, Maclaurin[1] gave the following simple derivation of Taylor's formula. He considered the equality

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots \tag{7}$$

and, desiring to determine the coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$, he found by successive differentiation

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\dots, \\ f''(x) &= 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\dots, \\ f'''(x) &= 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\dots, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Putting $x=0$ into (7) and (8), he obtained successively[2])

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2},\ a_3=\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \text{etc.} \tag{9}$$

4. **Taylor's series in the general form.** The following formula is derived in the same manner:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots \tag{10}$$

It gives the expansion of the function in powers of $(x-a)$. This formula was also known to Taylor; actually, it adds nothing new to (6).

Thus, for the function $f(x)=\ln x$, for $a=1$, formula (10) yields

$$\ln x=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots \tag{11}$$

But if we take the function $f(x)=\ln(1+x)$, then by formula (6) we find

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \tag{12}$$

Putting $1+x=z$, we obtain the formula

$$\ln z=\frac{z-1}{1}-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\dots \tag{13}$$

which differs from (11) solely in notation.

---

[1]) Maclaurin, Colin (1698-1746), English mathematician; the power series (6) is now (without sufficient grounds) known as Maclaurin's series.

[2]) If one proves the validity of the termwise differentiation of series (7), then Maclaurin's derivation flawlessly proves the following theorem: if $f(x)$ is expanded in the series (7), then the coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ are expressed by formulas (9). However, there are functions which cannot be expanded in the series (7) [although their derivatives $f'(0), f''(0), \dots$ exist]. An instance of such a function is given in the last footnote of this section.

5. **Remainder of Taylor's series.** The functions which were known in the 18th century permit expansion in the Taylor series (10) (for any values of a, except those for which the function or one of its derivatives becomes infinite). Proceeding from their restricted experience, the mathematicians of the 18th century did not doubt that any continuous function could be expanded in a Taylor series. However, the need was felt for a precise estimate of the error which formula (10) yields if it is terminated at the term $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

In 1799, Lagrange derived for the "remainder of the Taylor series", i.e. for the difference R_n,

$$R_n = f(x) - \left[f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right] \tag{14}$$

the following expression:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \tag{15}$$

Here, ξ is some number between a and x.

The proof of Lagrange presumed the expansibility of the function $f(x)$ in a Taylor series.[1] A quarter of a century later Cauchy proved formula (15) without that assumption; he also gave an alternative expression for the remainder. It became possible, from the expression of the remainder, to judge the expansibility of the function in a Taylor series: if $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, then the function $f(x)$ can be expanded in a Taylor series, otherwise it cannot. Cauchy gave the first example of a function[2] which, though it possesses all derivatives at a point $x=a$, cannot be expanded in the series (10) in powers of $x-a$ (these functions are of no practical value).

---

[1] Lagrange even proved that such an expansion is possible for any continuous function, but the proof was unsatisfactory.

[2] This function is given by the formula $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ under the additional condition $f(0)=0$ (for $x=0$ the formula becomes meaningless). The function $f(x)$ has derivatives of any order at $x=0$. They are all zero at this point so the right side of (10) is identically zero However, $f(x)$ does not vanish anywhere except at $x=0$.

271. Taylor's Formula [1]

Theorem. If a function $f(x)$ has derivatives up to the $(n+1)$th order inclusive [2] in a closed interval (a, b) then

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (1)$$

where ξ is some number between a and b.

Formula (1) is called Taylor's formula.

The last term $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$ is called *Lagrange's form of the remainder* [3] and yields a precise expression for the difference R_n between $f(b)$ and expression

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

("Taylor's polynomial"):

$$R_n=f(b)-\left[f(a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (2)$$

Taylor's formula establishes that Eq. (1), in which ξ is taken as the unknown, has at least one solution [4] between a and b (cf. Sec. 264).

When a is regarded as a constant and b as a variable, then x is written in place of b:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (3)$$

For $a=0$ we obtain the so-called [5] "Maclaurin formula"

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (4)$$

---

[1] It is advisable to read Sec. 270 first.

[2] The $(n+1)$th derivative may not exist at the end-points of the interval; the main thing is that the nth derivative be continuous not only at interior points but at the end-points of the interval as well.

[3] Unlike other forms of the remainder.

[4] For fixed values of a and b, the quantity ξ varies, as a rule, with n.

[5] Cf. Sec. 270, Item 3.

Example. Apply formula (4), for $n=2$, to the function $f(x)=\frac{1}{1+x}$. We have

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$$

Hence

$$f(0)=1,\quad \frac{f'(0)}{1!}=-1,\quad \frac{f''(0)}{2!}=+1,\quad \frac{f'''(\xi)}{3!}=-\frac{1}{(1+\xi)^4}$$

Formula (4) takes the form

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{(1+\xi)^4} \tag{5}$$

Here, ξ lies between zero and x. It is important to note that the formula holds true only when $x>-1$. In this case, the condition of the theorem is fulfilled: the function $\frac{1}{1+x}$ has all derivatives in the closed interval $(0, x)$.

Solving (5) for ξ, we find

$$\xi_1=\sqrt[4]{1+x}-1,\quad \xi_2=-\sqrt[4]{1+x}-1 \tag{6}$$

It is easy to verify that for $x>-1$ the first root ξ_1 indeed lies between zero and x.

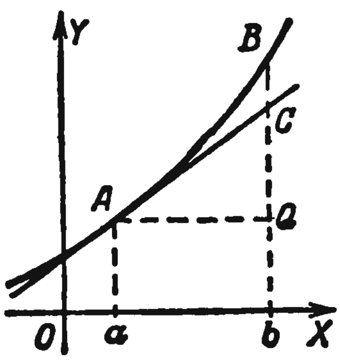


Fig. 258

Now if $x\leqslant-1$, then the condition of the theorem is not fulfilled, because the function $\frac{1}{1+x}$ does not have derivatives at the point -1, and this point either lies inside the interval $(0, x)$ (if $x<-1$) or coincides with its end-point (if $x=-1$).

Formula (5) becomes incorrect: for $x=-1$, the left side is meaningless, for $x<-1$, Eq. (5) has imaginary roots.

Note. For $n=0$, Taylor's formula (2) [in which we have to write $f(a)$ in place of $f^{(0)}(a)$] yields the formula of finite increments (Sec. 265)

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{7}$$

For $n=1$ we get

$$f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)=\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2 \tag{8}$$

or, in other notations,

$$[f(x+\Delta x)-f(x)]-f'(x)\Delta x=\frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2 \tag{8a}$$

This formula yields an expression for the difference between the increment in the function and its differential (segment CB in Fig. 258).

If the second derivative $f''(x)$ is continuous for the value of x under consideration, the difference between the increment in the function and its differential is of second order with respect to Δx [when $f''(x) \neq 0$] or of higher order [when $f''(x)=0$]. Cf. Sec. 230.

272. Taylor's Formula for Computing the Values of a Function

Taylor's formula frequently permits computing the values of a function to any degree of accuracy.

Let the following values

$$f(a),\quad f'(a),\quad f''(a),\quad f'''(a),\ \ldots$$

of the function $f(x)$ and its successive derivatives at the "initial" point $x=a$ be known. It is required to find the value of the function $f(x)$ for a different value of x.

In many cases it is sufficient for this purpose to compute the value of Taylor's polynomial

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

taking two, three, or more terms, depending on the required degree of accuracy. Of course, in doing so, we allow for a certain error R_n, which is equal to

$$R_n=f(x)-\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\right.$$
$$\left.+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right] \quad (2)$$

But it frequently happens that the error R_n diminishes without bound (in absolute value) with increasing number of terms (i. e. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$). Then Taylor's polynomial can yield the desired value of $f(x)$ to any degree of accuracy.

The number of terms that ensure the requisite degree of accuracy is essentially dependent on the distance $|x-a|$ between the initial point a and the point x. The greater $|x-a|$, the more terms one has to take (see Example 1). Also, we often find that the approach of R_n to zero not only slows down with increasing distance $|x-a|$, but even ceases altogether as the increase continues (see Example 2). Then the polynomial (1) can be used to compute $f(x)$ only over limited distances from the initial point.

Thus, we have to be able to answer the following questions: is the polynomial (1) suitable for computing $f(x)$ at a given distance $|x-a|$ from the initial point a, and if it is, then how many terms have to be taken to attain the required accuracy? It is also important to know whether for all distances the error R_n tends to zero with increasing number of terms, and if not so for every distance, then where its boundary lies.

Answers to these questions are obtained by applying a number of artifices. One of them[1] is based on the theorem of Sec. 271, which permits representing the error R_n in the form[2]

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{3}$$

Here, the number ξ is unknown; the only thing we know is that ξ lies between a and x. But even this suffices to evaluate the error R_n and answer the foregoing questions.

Example 1. Let $f(x)=e^x$. All the derivatives of this function are equal to e^x. We know the value of e^x at the point $x=0$ (namely $e^0=1$). We will take this point as the initial one. The conditions of the theorem of Sec. 271 are fulfilled for all values of x. In Taylor's polynomial (1) we must put

$$a=0, \quad f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=1 \tag{4}$$

and then it assumes the form

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n \tag{5}$$

Substituting for the value e^x the value of the polynomial (5), we allow for a certain error R_n, which is

$$R_n=e^x-\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right] \tag{6}$$

Since $f^{(n+1)}(x)=e^x$, the error R_n, according to formula (3), may be given as

$$R_n=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{7}$$

---

[1] This device is not the best, and at times is totally useless. Other devices are given below (Sec. 401).

[2] It is assumed that the function $f(x)$ satisfies the conditions of the theorem of Sec. 271, which is the case in numerous instances of practical importance.

The number ξ lies somewhere between zero and x (it depends both on x and on n). Hence, e^{ξ} lies between $e^0=1$ and e^x. This is sufficient for evaluating the error.

For example, let it be required to compute the value of e^x for $x=\frac{1}{2}$, i. e. to extract the square root of the number e. Since e lies between 2 and 3, it follows that $e^{\frac{1}{2}}$ is less than 2 and so e^{ξ} is most definitely less than 2. From (7) it follows that $|R_n| < \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, i.e.

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)!\,2^n} \tag{8}$$

With increasing n, the quantity $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ (limiting error) tends to zero, and the error R_n all the more so tends to zero. Hence, the polynomial (5), which now takes on the value

$$1+\frac{1}{1!\,2}+\frac{2}{2!\,2^2}+\frac{1}{3!\,2^3}+\ldots+\frac{1}{n!\,2^n} \tag{9}$$

is suitable for computing $\sqrt{e}$ to any degree of accuracy.

Now let us find out how many terms the sum (9) must have in order to ensure four-decimal-place accuracy (up to $\pm 0.5\cdot 10^{-4}$). To do this we compute the limiting error $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ for $n=1$, 2, 3, and so on: [1]

$$\frac{1}{2!\,2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3!\,2^2}=\frac{1}{2!\,2}:6=\frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4!\,2^3}=\frac{1}{3!\,2^2}:8=\frac{1}{192},$$

$$\frac{1}{5!\,2^4}=\frac{1}{4!\,2^3}:10=\frac{1}{1920},$$

$$\frac{1}{6!\,2^5}=\frac{1}{5!\,2^4}:12=\frac{1}{23040}$$

We can stop here because $\frac{1}{23040} < 0.5\cdot 10^{-4}$

[1] Beginning with the second row of the computation that follows we resort to a consecutive division by the even numbers 6, 8, 10, ..., proceeding from the identity

$$\frac{1}{(n+1)!\,2^n}=\frac{1}{2\,(n+1)}\;\frac{1}{n!\,2^{n-1}}$$

Thus, to ensure an accuracy of $0.5\cdot 10^{-4}$ it is sufficient for the sum (9) to have six terms. We obtain [1]

$$\begin{aligned}
&1 &&= 1.00000,\\
&\frac{1}{1!\,2} &&= 0.50000,\\
&\frac{1}{2!\,2^2} = \frac{1}{1!\,2}:4 &&= 0.12500,\\
&\frac{1}{3!\,2^3} = \frac{1}{2!\,2^2}:6 &&= 0.02083,\\
&\frac{1}{4!\,2^4} = \frac{1}{3!\,2^3}:8 &&= 0.00260,\\
&\frac{1}{5!\,2^5} = \frac{1}{4!\,2^4}:10 &&= 0.00026\\
& &&\overline{\ 1.64869}
\end{aligned}$$

We finally obtain

$$\sqrt{e} = 1.6487$$

We thus find that to ensure an accuracy up to $\pm\, 0.5\cdot 10^{-8}$, the sum (9) must have 10 terms because

$$|R_9| < \frac{1}{10!\,2^9} \approx 0.55\cdot 10^{-9} < 0.5\cdot 10^{-8}$$

The computation yields

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \ldots + \frac{1}{9!\,2^9} = 1.64872127$$

Taking 15 terms, it is possible to compute $e^{\frac{1}{2}}$ to within $0.5\cdot 10^{-16}$, etc. The accuracy of the result increases rapidly with increasing number of terms.

The accuracy increases more slowly if we compute e^x for larger values of $|x|$, say for $x=1$, or for $x=-1$.

Suppose we take $x=1$. Then the polynomial (5) takes the form

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \tag{10}$$

and yields an approximate value of the number e. The error R_n, by (7), is

$$R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \tag{11}$$

---

[1] Each term is computed to the fifth decimal in order to avoid an accumulation of errors.

The number e^{ξ} now lies between e^0 and e^1, i.e. between 1 and e, and since $e < 3$, it follows that

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!} \tag{12}$$

As before, the error approaches zero with increasing n. But now one has to take 9 terms in place of 6 in order to ensure an accuracy up to $0.5 \cdot 10^{-4}$ because the limiting error $\frac{3}{(n+1)!}$ becomes less than $0.5 \cdot 10^{-4}$ only for $n=8$. The computation yields

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}=2.7183$$

If we want to obtain an accuracy up to $0.5 \cdot 10^{-8}$, we have to take 13 terms (in place of 10); and the computation yields

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{12!}=2.71828183$$

Taking 15 terms, we can compute e to within only $0.5 \cdot 10^{-10}$ (instead of $0.5 \cdot 10^{-16}$ as in the computation of $\sqrt{e}$).

Now take $x=-1$. The polynomial (5) takes the form

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n \frac{1}{n!}$$

and yields an approximate value of the number e^{-1} $\left(\text{or } \frac{1}{e}\right)$. By (7), the error R_n is

$$R_n=(-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

The number ξ lies between minus unity and zero; hence, $e^{\xi} < e^0$, i.e. $e^{\xi} < 1$. Consequently

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)!}$$

Here the limiting error is less than in the preceding case by a factor of three For this reason, the number of terms needed to ensure the required accuracy may be reduced, but not by more than unity. Thus, an accuracy of up to $0.5 \cdot 10^{-10}$ is now ensured by 14, not 15 terms, which is not essential as far as the actual computations are concerned.

If instead of $x=\pm 1$ we take values of x still greater in absolute value, then the error of the approximate equality

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} \tag{13}$$

will tend to zero more slowly still. However, using formula (7) and reasoning as above, we are convinced that the error R_n will tend to zero for *any* value of x.

Fig. 259 depicts the graph ACB of the function $y=e^x$ and the curves of its Taylor polynomials

$$y=1,\ y=1+x,$$
$$y=1+x+\frac{x^2}{2},\ y=1+x+$$
$$+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

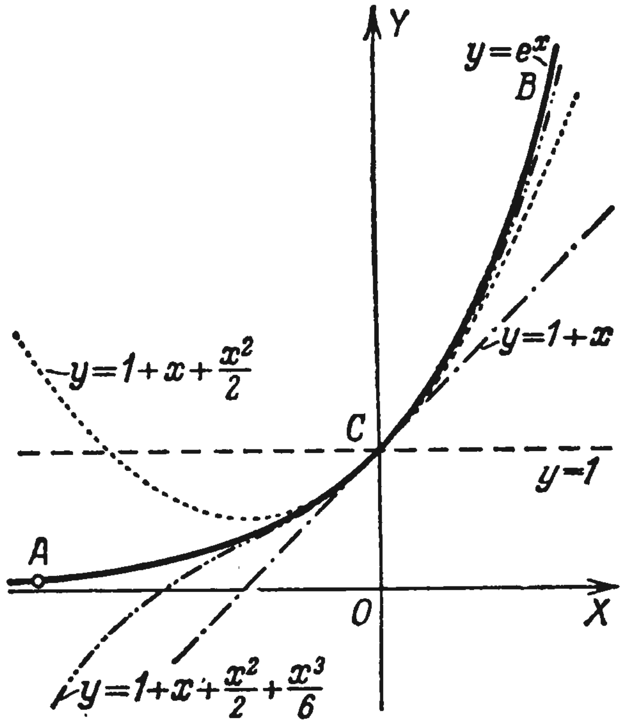


Fig. 259

Example 2. Let

$$f(x)=\ln(1+x)$$

As in Example 1, take the point $x=0$ as the initial point. The conditions of the theorem of Sec. 271 are fulfilled only for $x>-1$ [for $x\leqslant -1$, the function $\ln(1+x)$ becomes meaningless]. The consecutive derivatives are expressed as follows:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=(-)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

so that (Sec. 256, Example 3) we will have

$$f(0)=0,\quad \frac{f'(0)}{1!}=1,\quad \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{2},$$
$$\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

The Taylor polynomial (1) yields the approximate equality

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (14)$$

Since $f^{(n+1)}[\ln(1+x)]=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, the error R_n of (14) may, by formula (3), be represented in the form

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1} \tag{15}$$

where ξ lies somewhere between zero and x.

Let us, for example, compute the value of $\ln(1+x)$ for $x=-0.1$. We obtain the approximate equality

$$\ln 0.9 \approx -0.1 - \frac{1}{2}\cdot 0.1^2 - \frac{1}{3}\cdot 0.1^3 - \ldots - \frac{1}{n}\cdot 0.1^n \tag{16}$$

Its error is

$$R_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{0.1}{1+\xi}\right)^{n+1}$$

Since ξ lies between zero and -0.1, it follows that $1+\xi > 0.9$. Hence $|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{0.1}{0.9}\right)^{n+1}$ or

$$|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \tag{17}$$

The limiting error obviously approaches zero with increasing n, i.e. formula (16) is capable of yielding $\ln 0.9$ to any degree of accuracy. Thus, to ensure an accuracy up to $0.5\cdot 10^{-4}$ we have to take $n=4$, and we get

$$\ln 0.9 \approx -\left[0.1 + \frac{1}{2}\cdot 0.01 + \frac{1}{3}\cdot 0.001 + \frac{1}{4}\cdot 0.0001\right] \approx -0.1054$$

In the same way we can convince ourselves that formula (14) always holds if $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.[1] But as $|x|$ increases, the error R_n tends to zero more slowly. This approach is weakest of all when $x=1$. Then formula (14) yields

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

For example, to ensure an accuracy up to $0.5\cdot 10^{-4}$, we have to take 19999 terms.

And if x is just the slightest bit more than unity, the error does not tend to zero at all; on the contrary, $|R_n|$ increases without bound with increasing n.

---

[1] It also holds for all x between -1 and $-\frac{1}{2}$, but expression (15) does not convince us of this fact

Fig. 260 depicts the graphs of the function $y=\ln(1+x)$ (the curve ACB) and of the first three Taylor polynomials.

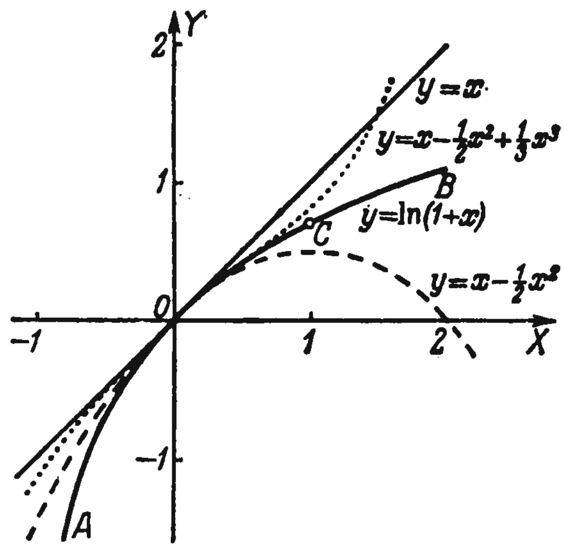


Fig. 260

273. Increase and Decrease of a Function

Definition 1. A function $f(x)$ is called an *increasing function at a point* $x=a$ if, *in a sufficiently small neighbourhood*, values of x greater than a are associated with values of $f(x)$ greater than $f(a)$, and smaller values correspond to smaller values.

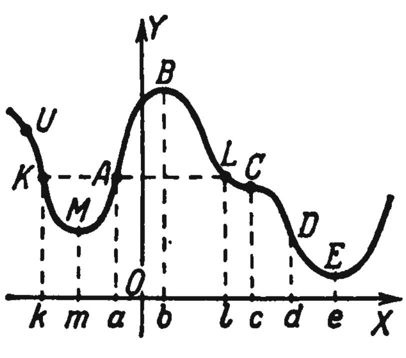


Fig. 261

A function $f(x)$ is called a *decreasing function at a point* $x=a$ if, *in a sufficiently small neighbourhood* of this point, values of x greater than a are associated with values of $f(x)$ smaller than $f(a)$, and smaller values are associated with greater values.

Example 1. The function depicted in Fig. 261 increases at the point $x=a$ because to the right of A the points of the curve lie above A and to the left, below A. Here we consider only those points of the curve whose ordinates are sufficiently close to the ordinate aA; in the given instance, these are the points which do not go beyond the limits of the arc KL. Outside this arc the relation no longer holds: point C lies to the right of A but below it, U lies to the left, but above it.

The same function is decreasing at the point $x=d$ because in a sufficiently close neighbourhood of D the points of the curve to the right lie below D, those to the left lie above D.

The function is also decreasing at the point $x=c$.

At the points $x=b$, $x=e$, $x=m$ the function is neither increasing nor decreasing (at $x=b$ it has a maximum, at $x=e$ and $x=m$ a minimum; Sec. 275).

Definition 2. A function is called *increasing in an interval* (a, b) if it is increasing at every point within the interval (but not necessarily at the end-points).

A function *decreasing in an interval* (a, b) is similarly defined.

Example 2. The function shown in Fig. 261 is decreasing in the interval (l, d) because it is decreasing at every point within the interval (and at its end-points as well). The same function is also decreasing in the interval (b, e) because it is decreasing at all interior points of the interval (but at the end-points b and e the function is not decreasing). In the interval (m, b) the function is increasing; in the interval (a, d) it is neither an increasing nor a decreasing function. Now if we split up the interval into two parts: (a, b) and (b, d), then in the former the function is increasing and in the latter it is decreasing.

If the function is increasing in the interval (a, b), then in that interval a greater value of the argument is always associated with a greater value of the function; conversely, if in the interval (a, b) a greater value of the argument is always associated with a greater value of the function, then the function is increasing in (a, b). [1]

If the function is decreasing in the interval (a, b), then a greater value of the argument is always associated with a smaller value of the function, and vice versa.

Geometrically, in those intervals in which the function is increasing its curve (rightward motion) rises; in intervals where the function is decreasing, the curve drops (cf. Example 2).

Definition 3. A function which in a given interval is increasing or decreasing is called *monotonic* (in that interval)

---

[1] This property is often taken as a definition of a function increasing in an interval. A function decreasing in an interval is similarlv defined.

274. Tests for the Increase and Decrease of a Function at a Point

Sufficiency test. If the derivative $f'(x)$ is positive at a point $x=a$, then the function $f(x)$ at this point is increasing, if it is negative, then the function is decreasing.

Geometrically, if the slope of the tangent MT (Fig. 262) is positive, then near M the curve lies above the point M

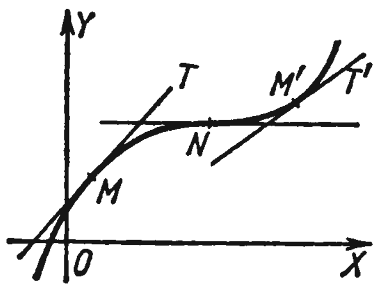


Fig. 262

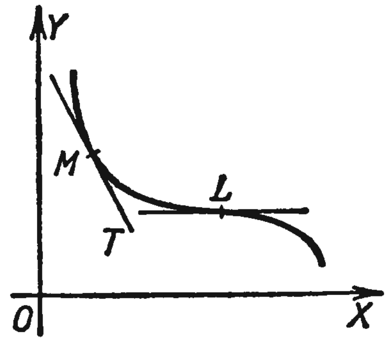


Fig. 263

to the right and below it to the left; if the slope is negative (Fig. 263), then near M the curve lies below M to the right and above M to the left.

Note. If $f'(a)=0$, then for $x=a$ the function may be increasing (point N in Fig. 262); it may be decreasing too

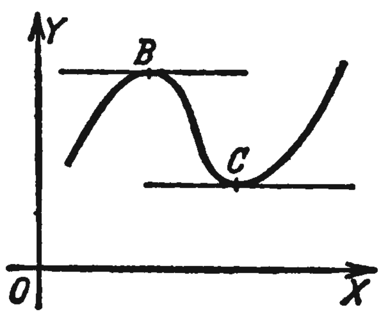


Fig. 264

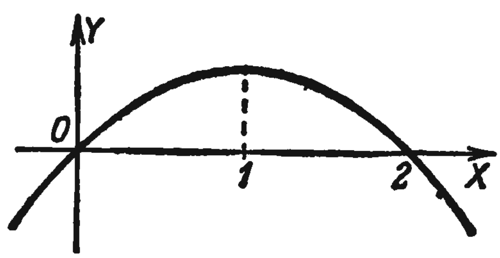


Fig. 265

(point L in Fig. 263). But as a rule, the function will not (for $x=a$) be either decreasing or increasing (points B and C in Fig. 264). Ways of distinguishing these cases are indicated in Secs. 278 and 279.

Example 1. The function $y=x-\frac{1}{2}x^2$ (Fig. 265) is increasing at the point $x=0$, because $y'=1-x=1>0$. The same function is decreasing at the point $x=2$ where $y'=-1<0$.

At $x=1$, where $y'=0$, the function is neither decreasing nor increasing.

Necessity test. If the function $f(x)$ is increasing at the point $x=a$, then its derivative[1] at this point is positive (as at point M in Fig. 262) or is equal to zero (as at point N in Fig. 262):

$$f'(a) \geqslant 0$$

Similarly for a decreasing function; its derivative is negative or zero at the point $x=a$:

$$f'(a) \leqslant 0$$

Example 2. The function $y=x^3$ (Fig. 266) is increasing at every point. Its derivative $y'=3x^2$ is positive everywhere except at the point $x=0$, where $y'=0$.

82

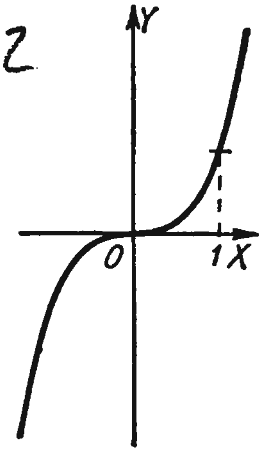


Fig. 266

274a. Tests for the Increase and Decrease of a Function in an Interval

Sufficiency test. If the derivative function $f'(x)$ in an interval (a, b) is everywhere positive, then the function $f(x)$ in this interval is increasing; if $f'(x)$ is everywhere negative, then $f(x)$ is decreasing (cf. Sec. 274).

Note. The test (criterion) also holds true when the derivative takes on zero values in the interval (a, b) so long as $f(x)$ does not identically become zero throughout the interval (a, b) or in some interval (a', b') comprising a part of (a, b) [the function $f(x)$ would be a constant on such an interval].

Example. The function $y=x-\frac{1}{2}x^2$ (Fig. 265) is increasing in the interval $(0, 1)$ because the derivative $y'=1-x$ takes on a zero value only at the point $x=1$, whereas at the remaining points of the interval $(0, 1)$ it is positive. The same function is decreasing in the interval $(1, 2)$ because here the derivative y' is everywhere negative except at the point $x=1$, where $y'=0$.

Necessity test. If the function $f(x)$ is increasing in the interval (a, b), then the derivative[2] $f'(x)$ is positive or zero in that interval

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ for } a \leqslant x \leqslant b$$

The same holds true for a decreasing function:

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ for } a \leqslant x \leqslant b$$

---

[1] It is assumed that $f(x)$ is differentiable at this point.

[2] It is assumed that the function is differentiable in the interval (a, b).

275. Maxima and Minima

Definition. We say that a function $f(x)$ has a *maximum at a point* $x=a$ if, *in a sufficiently close neighbourhood of the point*, all values of x (both greater and smaller than a) are associated with values of $f(x)$ smaller than $f(a)$.

A function $f(x)$ has a *minimum at a point* $x=a$ if, *within a sufficiently close neighbourhood of the point*, all values of x are associated with values of $f(x)$ which are greater than $f(a)$.

This can be stated more succinctly: a function $f(x)$ has a maximum (minimum) at a point $x=a$ if the value of $f(a)$ is greater (less) than all neighbouring values.

The generic term for maximum and minimum is *extremum (extreme value)*.

Example. The function $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$ (Fig. 267) has a maximum at the point $x=0$ $\left[\text{the point } A\left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ is higher than all neighbouring points}\right]$ and a minimum at the point $x=2$ [the point B $(2, -1)$ is lower than all neighbouring points].

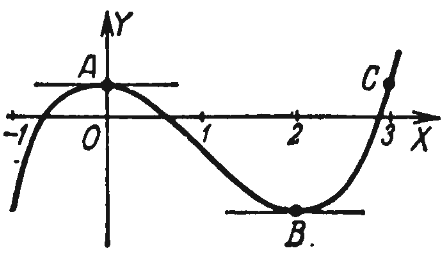


Fig. 267

Note. In ordinary language, the expressions "maximum" and "greatest quantity" are synonymous. In analysis, the term "maximum" has a narrower meaning: the maximum of a function need not be its greatest value. Thus, the function $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$ (see Fig. 267), if considered, say, in the interval $(-1, 4)$ has a maximum at $x=0$ because *near* this point [namely, in the interval $(-1, 3)$] all the values of x are associated with values of $f(x)$ which are smaller than $f(0)$, i.e. than $\frac{1}{3}$ (in that interval the graph is located below the point A). Still, the maximum $f(0)$ is not the greatest value of the function in the interval $(-1, 4)$ because for $x > 3$ we have

$$f(x) > \frac{1}{3}$$

(the graph to the right of C is located above the point A). However in the given interval, finding the greatest value of the function is closely associated with finding its maxima (see Sec. 280)

The same remark applies to minima as well.

276. Necessary Condition for a Maximum and a Minimum

Theorem. If a function $f(x)$ has an extremum (a maximum or a minimum) at a point $x=a$, then the derivative at this point is either zero, infinite or does not exist.

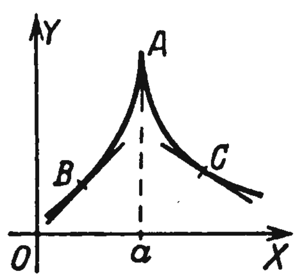


Fig. 268

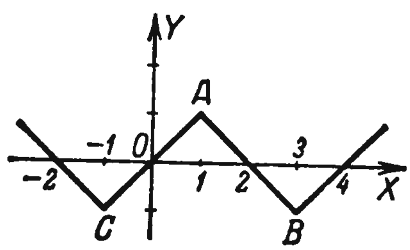


Fig. 269

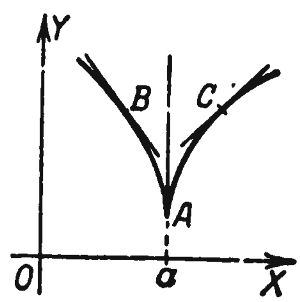


Fig. 270

Geometrically, if a graph has a maximum ordinate at a point A, then the tangent at this point is either horizontal (Fig. 267), vertical (Fig. 268) or does not exist (Fig. 269). The same applies to the minimum ordinate (point B in Fig. 267, point A in Fig. 270, points B and C in Fig. 269).

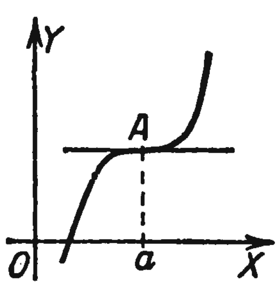


Fig. 271

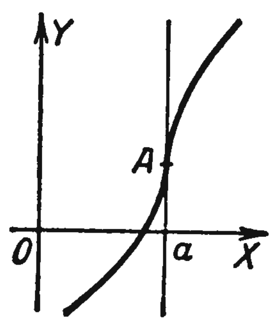


Fig. 272

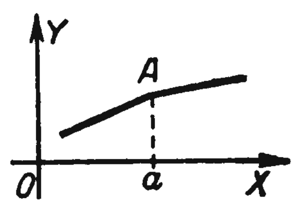


Fig. 273

Note. The condition for an extremum as given in the theorem is necessary but *not sufficient*, that is, the derivative at the point $x=a$ can vanish (Fig. 271), become infinite (Fig. 272) or not exist (Fig. 273) without the function having an extremum at that point.

277. The First Sufficient Condition for a Maximum and a Minimum

Theorem. If, sufficiently close to a point $x=a$, the derivative $f'(x)$ is positive on the left of a and negative on the right of a (Fig. 274), then at the point itself, $x=a$, the function $f(x)$ has a maximum provided that $f(x)$ is continuous here. [1]

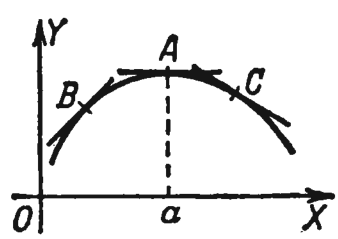


Fig. 274

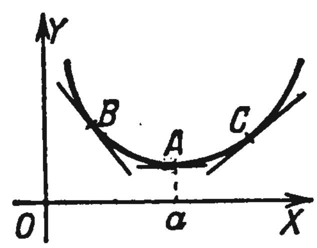


Fig. 275

If, on the contrary, the derivative $f'(x)$ is negative on the left of a and positive on the right (Fig. 275), then $f(x)$ has a minimum at the point a provided that it is continuous here. [2]

The theorem states that when $f(x)$ passes from increasing values to decreasing values, it has a maximum; when it passes from decreasing to increasing values, it has a minimum.

Note. According to the theorem, the test for an extremum of a function $f(x)$ is the *change of sign* of the derivative $f'(x)$ when the argument passes through the value $x=a$ under consideration.

Now, if in passing through $x=a$ the derivative *retains* its sign, then $f(x)$ *is increasing* at the point $x=a$ when the derivative is positive both on the right and on the left of $x=a$ (Figs. 271, 272, 273) and *is decreasing* when the derivative is negative (Fig. 276). [It is again assumed that $f(x)$ is continuous at $x=a$.]

278. Rule for Finding Maxima and Minima

Let a function $f(x)$ be differentiable in an interval (a, b). In order to find all its maxima and minima in the interval, it is necessary to:

(1) *Solve the equation* $f'(x)=0$ (the roots of this equation are called the *critical* values of the argument; among them

---

[1] However, $f(x)$ need not be differentiable at $x=a$ (see Fig. 268).
[2] However, $f(x)$ need not be differentiable at $x=a$ (see Fig. 270).

we have to seek the values of x which yield an extremum of the function $f(x)$; see Sec. 276).

(2) *Investigate, for every critical value $x=a$, to see whether the derivative $f'(x)$ changes sign when the argument passes through this value.* If $f'(x)$ passes *from positive values to negative values* (when going from $x<a$ to $x>a$), then we have a *maximum* (Sec. 277), if it goes *from negative values to positive values*, then we have a *minimum*.

But if $f'(x)$ preserves its sign, then there is neither maximum nor minimum: for $f'(x)>0$, the function $f(x)$ is increasing at the point a, for $f'(x)<0$, it is decreasing (Sec. 277, Note).

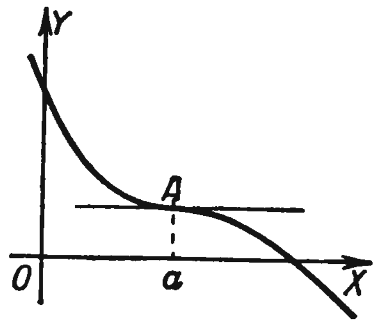


Fig. 276

Sign of Derivative		Shape of Graph Near Point a	
for $x<a$	for $x>a$		
+	−		maximum
−	+		minimum
+	+		increase
−	−		decrease

Note 1. If a function $f(x)$ is continuous in an interval (a, b), but not differentiable at certain points, then these points must be classed with the critical points and a similar investigation must be carried out.

Note 2. The maxima and minima of a continuous function follow one another in alternation.

Example 1. Find all the maxima and minima of the function $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

Solution. This function is everywhere differentiable (i. e. it has a finite derivative everywhere) $f'(x)=1-x$.

(1) Solve the equation $1-x=0$. It has a unique root $x=1$.

(2) The derivative $f'(x)=1-x$ changes sign as the argument passes through the value $x=1$. Namely, for $x<1$ the derivative is positive, for $x>1$, it is negative. Hence, the critical value $x=1$ yields a maximum. The function has no other extreme values (see Fig. 265).

Example 2. Find all the maxima and minima of the function

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3 \tag{1}$$

Solution. This function is everywhere differentiable. We have

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=$$
$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

(1) Solve the equation $f'(x)=0$. Its roots (in increasing order) are

$$x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{5},\ x_3=1 \tag{2}$$

(2) Representing the derivative in the form

$$f'(x)=5(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1) \tag{3}$$

we investigate each of the critical values.

(a) For $x<-1$, all three binomials of formula (3) are negative, so that to the left of $x=-1$ we have

$$f'(x)=5(-)^2(-)(-)=+ \tag{4}$$

Let the argument pass through the value $x_1=-1$, but suppose it has not yet reached the next critical value, $x_2=\frac{1}{5}$. Then the binomial $x+1$ is positive, the two other binomials of (3) remain negative, and we have

$$f'(x)=5(+)^2(-)(-)=+ \tag{5}$$

Comparing (4) and (5) we see that the derivative does not change sign (remains positive) when passing through the critical value $x_1=-1$. Hence there is no extremum at the point $x=-1$; here the function $f(x)$ is increasing (Fig. 277).

(b) Investigate the nearest larger critical value $x_2=\frac{1}{5}$. Sufficiently close on the left $\left(\text{i.e. between } x_1=-1 \text{ and } x_2=\frac{1}{5}\right)$ the derivative is positive by virtue of (5). Sufficiently close on the right $\left(\text{between } x_1=\frac{1}{5} \text{ and } x_2=+1\right)$ the second factor is positive and we have

$$f'(x)=5(+)^2(+)(-)=- \tag{6}$$

Comparing (5) and (6) we see that the sign of the derivative changes from plus to minus when passing through $x_2=\frac{1}{5}$ [the function $f(x)$ passes from increasing values to decreasing values]. Hence the function has a maximum at the point $x=\frac{1}{5}$; it is equal to

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}-1\right)^2\left(\frac{1}{5}+1\right)^3\approx 1.1$$

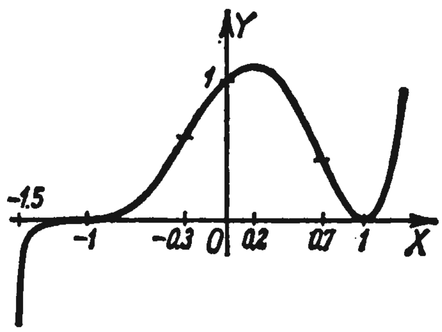


Fig. 277

(c) Investigate the last critical value, $x_3=1$. Sufficiently close on the left, the derivative is negative by virtue of (6). To the right of $x=1$ we have

$$f'(x)=\frac{1}{5}(+)^2(+)(+)=+ \tag{7}$$

When passing through $x=1$, the derivative changes from minus to plus [the function $f(x)$ passes from decreasing to increasing values]. Hence at $x=1$ the function has a minimum, which is equal to

$$f(1)=(1-1)^2(1+1)^3=0$$

Example 3. Find all the extrema of the function

$$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

Solution. The given function is differentiable for all positive and negative values of x and we have

$$f'(x)= \quad + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\,\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$$

At the point $x=0$ the function $f(x)$ is not differentiable (its derivative is infinite). Therefore (see Note 1) we have two critical values: $x_1=0$ and $x_2=\frac{2}{5}$. For $x<0$, we have

$$f'(x)=\frac{5}{3}\frac{(-)}{\sqrt[3]{-}}=+$$

For $0<x<\frac{2}{5}$ we have

$$f'(x)=\frac{5}{3}\frac{(-)}{\sqrt[3]{+}}=-$$

For $x>\frac{2}{5}$ we have

$$f'(x)=\frac{5}{3}\frac{(+)}{\sqrt[3]{+}}=+$$

Hence at the point $x=0$ the function $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ has the maximum

$$f(0)=0$$

and at the point $x=\frac{2}{5}$, the minimum

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\approx-0.33$$

279. The Second Sufficient Condition for a Maximum and a Minimum

When it is difficult to distinguish the sign of the derivative near critical points (Sec. 278), one can use the following sufficient condition for an extremum.

Theorem 1. Let the first derivative $f'(x)$ vanish at the point $x=a$; if the second derivative $f''(a)$ is then negative, the function $f(x)$ has a maximum at $x=a$, if it is positive, then the function has a minimum. For the case $f''(a)=0$, see Theorem 2.

The second condition is related to the first in the following manner. We consider $f''(x)$ as a derivative of $f'(x)$. The relation $f''(a)<0$ means (Sec. 274) that $f'(x)$ is decreasing at the point $x=a$. And since $f'(a)=0$, it follows that $f'(x)$ is positive for $x<a$ and negative for $x>a$. Hence (Sec. 277), $f(x)$ has a maximum at $x=a$ The situation is similar for the case $f''(a)>0$.

Example 1. Find the maxima and minima of the function

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+1$$

Solution. Solving the equation

$$f'(x) = 2x^3 - 2x = 0$$

we obtain the critical values

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

Substituting them into the expression of the second derivative

$$f''(x) = 6x^2 - 2 = 2(3x^2 - 1)$$

we find that

$$f''(-1) > 0, \quad f''(0) < 0, \quad f''(1) > 0$$

Hence at $x = -1$ and $x = 1$ we have a minimum, and at $x = 0$ a maximum (Fig. 278).

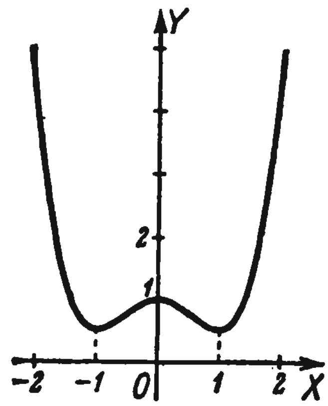


Fig. 278

It may happen that the second derivative vanishes together with the first; this can also happen with regard to a number of subsequent derivatives. In such cases one can make use of the following generalization of Theorem 1.

Theorem 2. If at the point $x=a$, where the first derivative is zero, the closest nonzero derivative is of even order, $2k$, then the function $f(x)$ has, at $x=a$, a maximum when $f^{(2k)}(a) < 0$, and a minimum when $f^{(2k)}(a) > 0$.

Now if the closest nonzero derivative is of odd order, $2k+1$, then the function $f(x)$ does not have an extremum at the point a; it is increasing when $f^{(2k+1)}(a) > 0$ and is decreasing when $f^{(2k+1)}(a) < 0$.

Note. Theoretically, it is not precluded that at a point $x=a$ *all the derivatives* of the function $f(x)$ (which is not a constant) are equal to zero.[1] However, this case is of no practical significance.

Example 2. Find the maxima and minima of the function

$$f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$$

Solution. We have

$$f'(x) = 3 \cos 3x - 3 \cos x$$

Solving the equation

$$3 \cos 3x - 3 \cos x = 0$$

we find

$$x = k \frac{\pi}{2}$$

where k is any integer.

Since this function has a period 2π, it is sufficient to investigate four roots:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \pi, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

[1] Such, for instance, is the function considered in the last footnote of Sec. 270 (p. 350).

Take the second derivative

$$f''(x) = -9 \sin 3x + 3 \sin x$$

Substituting the critical values x_1, x_2, x_3, x_4, we find

$$f''(0) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12,$$

$$f''(\pi) = 0, \quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -12$$

At the point $x_2 = \frac{\pi}{2}$ the nearest nonzero derivative is of second (even) order, and $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Hence, it has a minimum at $x = \frac{\pi}{2}$ Similarly, we conclude that at $x = \frac{3\pi}{2}$ it has a maximum $\left[\text{because } f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0\right]$

The extremal values will be

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 3\frac{\pi}{2} - 3 \sin \frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4 \text{ (minimum)}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{9\pi}{2} - 3 \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - (-3) = 4 \text{ (maximum)}$$

To investigate the critical values $x_1 = 0$ and $x_3 = \pi$, let us find the third derivative

$$f'''(x) = -27 \cos 3x + 3 \cos x$$

We have

$$f'''(0) = -24, \quad f'''(\pi) = +24$$

At the point $x = 0$ the nearest nonzero derivative is of third (odd) order, and $f'''(0) < 0$. Hence, at $x = 0$ there is no extremum. Here, the function $f(x)$ is decreasing. Similarly, we conclude that at $x = \pi$ as well there is no extremum; but here the function $f(x)$ is increasing [because $f'''(\pi) > 0$]

280. Finding Greatest and Least Values of a Function

1 Suppose that by the conditions of the problem the argument of a continuous function $f(x)$ varies in an infinite interval, say in the interval $(a, +\infty)$. Then it may happen that there is no greatest value of the function $f(x)$; see Fig. 279*a* where $f(x)$ increases without bound as $x \to +\infty$. But if $f(x)$ has a greatest value, then this value is definitely one of the extrema of the function; see Fig. 279*b*, where the greatest value of the function is $f(c)$.

Now let it be given that the argument x varies in a *closed* interval (a, b). Then $f(x)$ definitely assumes a greatest value

(Sec. 221). However, this value may not belong to the extrema, for it may be attained at one of the end-points of the interval (at point $x=b$[1] in Fig. 279c).

The same goes for the least value.

2. Let it be required to find the greatest (or least) value of a geometric or physical quantity which obeys definite conditions (see examples below). Then it is necessary to represent the quantity as a function of some argument. From

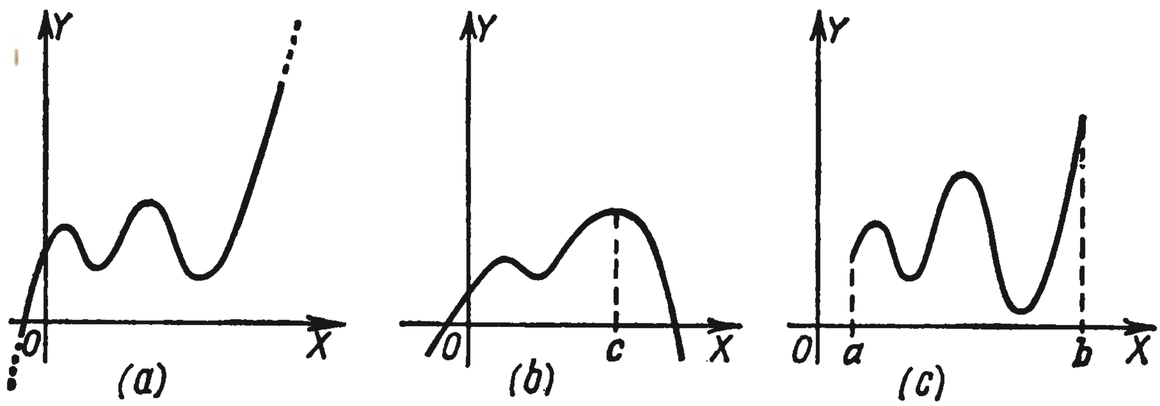


Fig. 279

the conditions of the problem we determine the range of the argument. Then we find all the critical values of the argument lying within this interval and compute the appropriate values of the function, and also the values of the function at the end-points of the interval. From the values thus found we choose the greatest (least).

Note 1. It often happens that the argument may be chosen in a variety of ways; a lucky choice can simplify the solution. Allowance for the peculiarities of the problem can also simplify the solution.

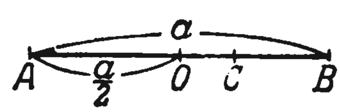


Fig. 280

For instance, if within a given interval there is only one critical value of the argument and, on the basis of some test (see Secs. 277, 279), it should yield a maximum (minimum), then even without a comparison with the boundary values of the function we are justified in concluding that this maximum (minimum) is the desired greatest (least) value.

Example 1. In Fig. 280, the segment $AB=a$ is divided into two parts by C; on AC and CB construct the rectangle $ACBD$. Find the greatest value of its area S.

---

[1] If the end-point $x=b$ is not considered, then over the remaining *open* interval the function $f(x)$ will not have a greatest value.

Solution. For the argument x we take the length AC; then

$$CB = a - x \text{ and } S = x(a - x)$$

The argument x of the continuous function S varies in the interval $(0, a)$

From the equation

$$\frac{dS}{dx} = a - 2x = 0$$

we find the (unique) critical value $x = \frac{a}{2}$. It belongs to the given interval $(0, a)$. We compute the value of $S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ and the boundary values of $f(0) = 0$, $f(a) = 0$. Comparing these three values, we conclude that $\frac{a^2}{4}$ is the desired greatest value.

This comparison will not be needed if we note that in the unique critical point $x = \frac{a}{2}$ the second derivative of the function $S(x)$ is negative, i.e. (Sec. 279) the function $S(x)$ has a maximum there.

The variable rectangle $ACBD$ always has one and the same perimeter $(2a)$. Hence, *of all rectangles of a given perimeter the square has the greatest area.*

Note 2. Most convenient of all is to take for the argument the distance z from the point C to the midpoint O of the segment AB (see Fig. 280). Then

$$AC = AO + OC = \frac{a}{2} + z, \qquad CB = OB - OC = \frac{a}{2} - z$$

and

$$S = \left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2$$

Now there is no need to seek an extremum because $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2$ quite obviously does not exceed $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Example 2. Under the conditions of Example 1 find the least value of the area S.

Solution. Taking $x = AC$ for the argument, we compare the unique extremum $\left(\frac{a^2}{4}\right)$ of the function $S = x(a - x)$ with its value $(S = 0)$ at the end-points of the interval $x = 0$ and $x = a$. We find that zero is the least value of S [*in the closed interval* $(0, a)$].

However, for $x = 0$ and $x = a$ we do not have a rectangle in the proper sense of the word (it degenerates into the line segment AB). If we consider only "real" rectangles, then the end-points of the interval

(0, a) ought to be excluded and then S does not have a least value [in the open interval (0, a)]

Example 3. Find the least and the greatest values of the semiperimeter p of a rectangle having a given area S.

Solution. Denote the sides of the rectangle by x, y. It is given that

$$xy=S \tag{1}$$

(x and y are positive quantities) It is required to find the least and greatest values of the quantity

$$p=x+y \tag{2}$$

Take x for the argument; then

$$p=x+\frac{S}{x} \tag{3}$$

The argument x varies in the infinite interval $(0, +\infty)$ (the end-point $x=0$ is excluded). In this interval the function $p(x)$ is continuous and has the derivative

$$\frac{dp}{dx}=1-\frac{S}{x^2} \tag{4}$$

From the equation

$$1-\frac{S}{x^2}=0 \tag{5}$$

we find the unique (in this interval) critical value

$$x=\sqrt{S}$$

From (4) it is seen that for $0<x<\sqrt{S}$ the derivative $\frac{dp}{dx}$ is negative and for $x>\sqrt{S}$ it is positive. Hence (Sec. 277) it has a minimum. Since this minimum is the only one (see Note 1) it is the least value of the semiperimeter: [1]

$$p_{min}=\sqrt{S}+\frac{S}{\sqrt{S}}=2\sqrt{S} \tag{6}$$

---

[1] The problem may be solved without finding the extremum. Equalities (2) and (1) yield $p^2=(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4S$. Since $4S$ is a constant and the least value of $(x-y)^2$ is zero (when $x=y$), it follows that the least value of p^2 is $4S$; hence, the least value of p is $2\sqrt{S}$

This method is simpler (in that it does not require higher mathematics) and is shorter. But it is based on guesswork, and in that sense it is more difficult than the general method given above.

i. e., *of all rectangles of a given area S the square* ($x=\sqrt{S}$, $y=\sqrt{S}$) *has the smallest semiperimeter*

The quantity p does not have a greatest value since the given interval $(0, +\infty)$ is open.

Example 4. Find the least amount of tin to be used in making a cylindrical tin can with a volume of two litres ($V=2l$, the extra material for seams is not taken into account).

Solution. Let the surface of the can be S, the radius of the base r, the height h. It is required to find the least value of the quantity

$$S=2\pi rh+2\pi r^2 \tag{7}$$

provided that

$$\pi r^2 h=V \tag{8}$$

For the argument it is convenient to take r. From (7) and (8) we find

$$S=2\left(\frac{V}{r}+\pi r^2\right) \tag{9}$$

where the argument varies in the interval $(0, \infty)$. From the meaning of the problem it is clear that the quantity S reaches a least value somewhere inside this interval. It is therefore sufficient to consider the values of the function at the critical points.

Solve the equation

$$\frac{dS}{dr}=2\left(-\frac{V}{r^2}+2\pi r\right)=0 \tag{10}$$

Its sole root

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \tag{11}$$

corresponds to the least value of S. From (8) and (11) we get $h=\frac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r$, that is, *the height of the can must be equal to the diameter of the base*. The least amount of tin required to make the can is then

$$S_{min}=2\pi(rh+r^2)=6\pi r^2=3\sqrt[3]{2\pi V^2}\approx 879\text{ cm}^2$$

Example 5. (Descartes' paradox). In 1638 Descartes received (through M. Mersenne) a letter of Fermat, where Fermat gave without proof a rule which he had discovered for finding extrema. Translated into modern language, the Fermat rule reduces to finding the values which make the derivative $f'(x)$ of the function $f(x)$ under consideration vanish.

In a return letter Descartes described the following example which he believed proved the Fermat rule to be erroneous.

Let there be given a circle

$$x^2+y^2=r^2 \tag{12}$$

(Fig. 281) and a point $A(-a, 0)$ distinct from the centre (that is, $a \neq 0$). It is required to find on the circle (12) a point that is closest to A. The square of the distance of an arbitrary point $M(x, y)$ from the point A is given as

$$AM^2=(x+a)^2+y^2 \tag{13}$$

Now if M lies on the circle (12), then

$$y^2=r^2-x^2$$

so that

$$AM^2=(x+a)^2+r^2-x^2$$

In order to find the value of x which minimizes the quantity AM^2, Descartes followed Fermat's rule and obtained the absurd equality $2a=0$

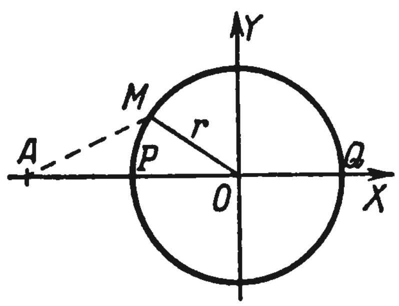


Fig. 281

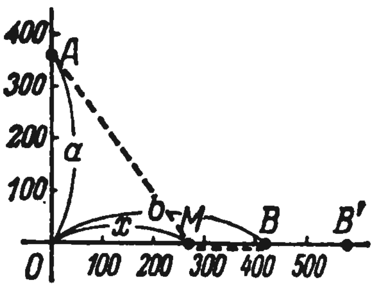


Fig. 282

Yet, geometrically, it is clear that the desired point exists and coincides with the point $P(-r, 0)$. From this Descartes concluded that the test for the minimum was incorrect. Actually, the point P $(x=-r)$ is not revealed for a different reason: the least value of AM^2 corresponding to it *is not a minimum*. Indeed, x varies only in the interval $(-r, +r)$. The function at hand assumes its least value at the end-point of the interval.

Example 6. A group of swimmers strike out from boat A (Fig. 282) to a point B on the shore. The conditions of the competition allow part of the distance to be covered by land. The boat stands opposite pier O at a distance $OA=a=360$ metres; the point of destination B is at a distance of $OB=b=420$ metres from the pier. What is the best result that can be obtained by a participant if he covers 90 metres per minute swimming and 150 metres per minute running?

Solution. Let the swimmer land at point M, a distance $OM=x$ from the pier. It will suffice to consider the variation of x in the interval $(0, b)$.[1]

The time t (in minutes) spent in covering the distance AMB is

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{b-x}{150} \tag{14}$$

[1] It is senseless for a swimmer to get to the shore outside OB because it takes longer to swim to B' than to B and he would have to run the distance between B' and B.

Here, $a=360$, $b=420$. It is required to find the least value of the function t in the interval $(0, b)$.

We have

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{90\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{150} \tag{15}$$

Solving the equation

$$\frac{x}{90\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{150}=0 \tag{16}$$

we find the sole critical value $x=\frac{3}{4}a=270$ metres. This value lies in the interval $(0, b)$ under consideration. Since the second derivative

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{1}{90}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{a^2}{90\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$$

at the point $x=\frac{3}{4}a$ (as at all other points) is positive, it follows (Sec. 279, Theorem 1) that we have a minimum at this point. Since this is the only minimum (see Note 1), it yields the desired least value of the function t:

$$t_{min}=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}}{90}+\frac{b-\frac{3}{4}a}{150}=6 \text{ (minutes)}$$

The path of the swimmer is shown in Fig. 282 by the dashed line.

Example 6a. Solve the same problem as in Example 6 but with $b=420$ metres changed to $b=225$ metres (Fig. 283).

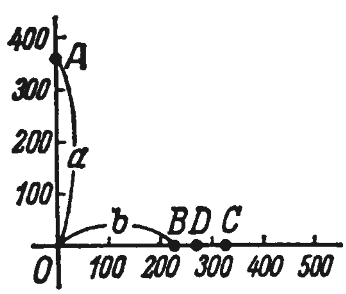


Fig. 283

Solution. It suffices to consider the variation of x in the interval $(0, 225)$. Since the root $x=270$ of Eq. (16) lies beyond this interval, the function t now has no minimum inside the interval. The least value is assumed at the end-point $x=b=$ $=225$. Here,

$$t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{90}=4 \text{ min } 43 \text{ sec}$$

The swimmer has to swim directly to the finishing point.

Note 3. When solving this problem, we considered, as common sense suggests, the variation of the argument x of the function

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{b-x}{150} \tag{14}$$

(where $a=360$, $b=225$) only in the interval $(0, 225)$.

But we could have extended the range of the argument and considered, say, the interval $(0, 325)$. Then, reasoning as in Example 6, we would have found that the function (14) has a minimum at $x=270$ [because this point lies in the interval of interest, is the sole critical value of the function (14), and minimizes the function].

From this it would seem possible to conclude that the swimmer ought to swim to point D, which is at a greater distance than the finishing point B, but this is manifestly absurd.

The mistake stems from the fact that the function (14) expresses the dependence of t on x *only* over the interval OB, whereas on the segment BC the dependence is expressed by the formula

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{x-b}{150} \qquad (14')$$

(see schematic graph in Fig. 284).

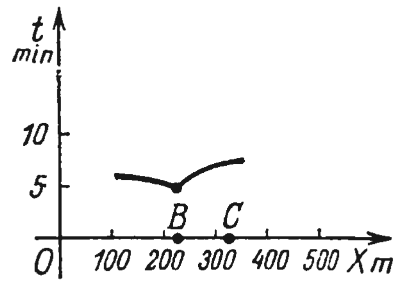


Fig. 284

When $x=b$ both formulas (14) and (14′) yield the same value, so that the function $t(x)$ is continuous only at $x=b$, but the derivative $\frac{dt}{dx}$ does not exist at $x=b$. For this reason, the point $x=b$ is now a critical point of the function $t(x)$ (cf. Sec. 278, Note 1). There are no other critical points in the interval (0, 325).

281. The Convexity of Plane Curves. Point of Inflection

A plane curve L is called *convex at a point* M (Fig. 285) if in a sufficiently small neighbourhood of M the curve L lies on one side of the tangent MT (the *direction of concavity* of L). The opposite side is called the *direction of convexity*.

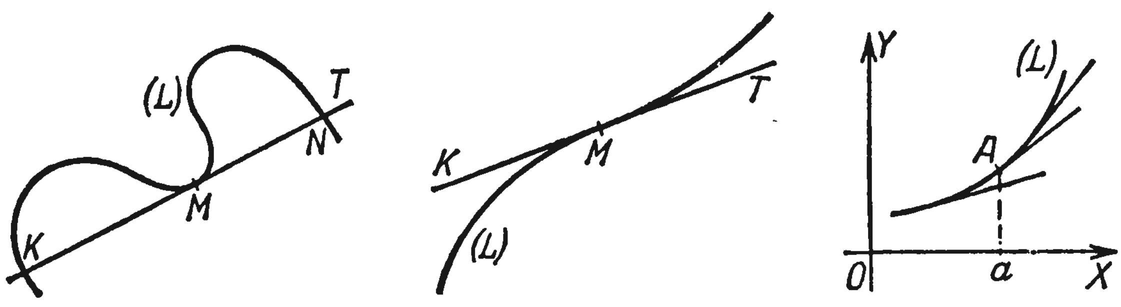


Fig. 285 Fig. 286 Fig. 287

If the curve L near the point M lies on both sides of the tangent MT (Fig. 286), then M is called a *point of inflection* of the curve L.

When passing through a point of inflection, convexity turns to concavity and vice versa.

Let L be given by the equation $y=f(x)$. If the *derivative* $f'(x)$ increases at the point $x=a$, then L is concave up (Fig. 287), if it decreases, then it is concave down (Fig. 288).

Now if the derivative $f'(x)$ has an extremum at $x=a$ (Figs. 289, 290), then the curve L has a point of inflection there.

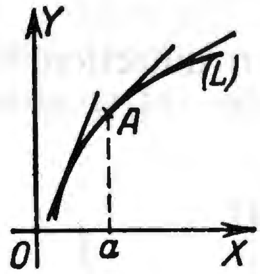


Fig 288

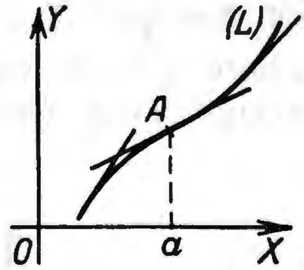


Fig. 289

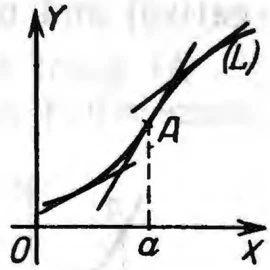


Fig. 290

282. Direction of Concavity

1. If the second derivative $f''(x)$ at a point $x=a$ is positive, then the curve $y=f(x)$ is concave up, if the derivative is negative, then it is concave down (schematic figure 291).

Explanation. If $f''(a)>0$, then $f'(x)$ is increasing at $x=a$ (Sec. 274); hence (Sec. 281) the concavity is up. The reasoning is similar for the case $f''(a)<0$.

2. Let the second derivative $f''(x)$ be zero, infinite or nonexistent altogether at the point $x=a$.

Fig. 291

Fig. 292

Then, if in passing through $x=a$ the second derivative[1] changes sign, the curve $y=f(x)$ has a point of inflection there (Fig. 292). But if $f''(x)$ does not change sign, then the curve $y=f(x)$ is concave in the appropriate direction (see Item 1) (cf. Secs. 277 and 281)

Example 1. The curve

$$y=3x^4-4x^3$$

(Fig. 293) at point $A\left(-\frac{1}{3},\ \frac{5}{27}\right)$ is concave up, but at point $B\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{9}\right)$ it is concave down because the second derivative

$$y''=36x^2-24x=12x(3x-2)$$

[1] It is assumed that it exists *near* point a.

is positive for $x=-\frac{1}{3}$ [both factors $12x$ and $(3x-2)$ are negative] and negative for $x=\frac{1}{3}$

At point $O(0, 0)$, where $y''=0$, we have an inflection because when passing through $x=0$ the second derivative chan-

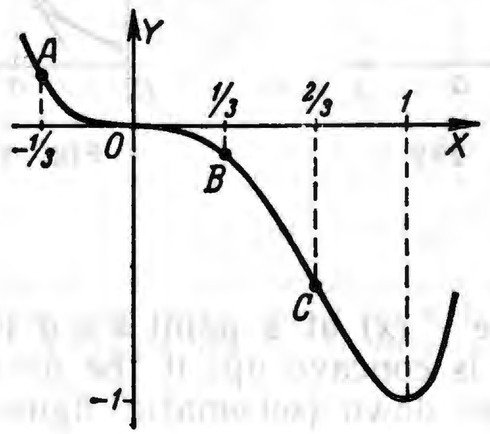


Fig. 293

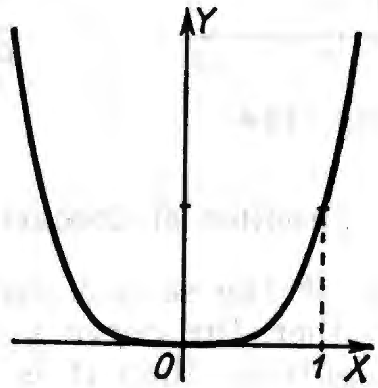


Fig 294

ges sign from plus (for $x<0$) to minus (for $x>0$). To the left of O the curve is concave up and to the right it is concave down.

Example 2. The curve $y=x^4$ (Fig. 294) at the point $O(0, 0)$, where $y''=0$, is concave up because when passing through $x=0$ the function $y''=12x^2$ preserves the plus sign

Example 3. The curve $y=-x^{\frac{1}{3}}$ (Fig. 295) has an inflection at the point $O(0, 0)$ where the second derivative is infinite, because in passing through $x=0$ the second derivative $y''=+\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ changes sign from minus to plus. To the left of O the curve is concave down and to the right it is concave up.

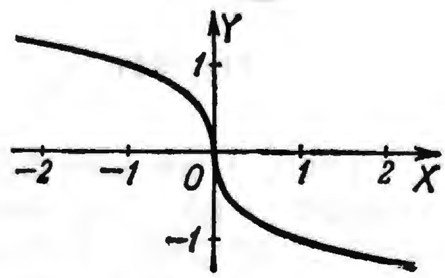


Fig. 295

283. Rule for Finding Points of Inflection

In order to find all the points of inflection of a curve $y=f(x)$, it is necessary to test all those values of x for which the second derivative $f''(x)$ is zero, infinite or nonexistent (inflections are possible only at such points; Sec. 282)

If in passing through one of these values, the second derivative changes sign, then the curve has a point of inflection at that point. If there is no change, there is no inflection (Sec. 282, Item 2).

Example 1. Find the points of inflection of the curve $y=3x^4-4x^3$.

Solution. We have

$$y''=36x^2-24x=12x\,(3x-2)$$

The second derivative is everywhere existent and finite; it vanishes at two points: $x=\frac{2}{3}$ and $x=0$. Consider the point $x=\frac{2}{3}$. If x is somewhat less than $\frac{2}{3}$ $\left(\text{namely, if } 0<x<\frac{2}{3}\right)$, then

$$y''=12\,(+)\,(-)=-$$

if x is somewhat greater than $\frac{2}{3}$ $\left(\text{in the given case, any number may be taken which is greater than } \frac{2}{3}\right)$, then

$$y''=12\,(+)\,(+)=+$$

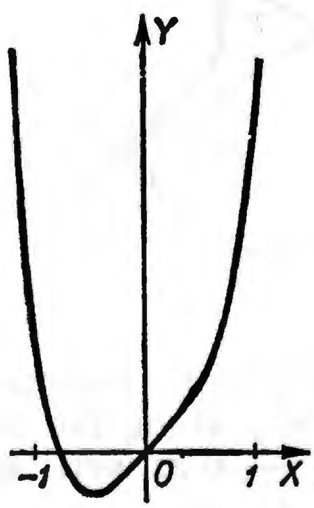


Fig. 296

The second derivative changes sign when passing through $x=\frac{2}{3}$; hence at that point of the graph (point C in Fig. 293) we have an inflection. At $x=0$ there is also an inflection (Sec. 282, Example 1).

Example 2. Find the points of inflection of the curve

$$y=x+2x^4$$

Solution. We have $y''=24x^2$

The second derivative is everywhere finite and vanishes only at $x=0$. When passing through $x=0$, the second derivative preserves the plus sign, as it does everywhere. Hence there is no inflection either here or at any other points. The curve is concave up (Fig. 296).

284. Asymptotes

Let point M (Fig. 297) be in motion in some direction along the curve L from a position M_0. If in such motion the distance M_0M (reckoned along a straight line) increases without bound, than we say that the point M *recedes to infinity*.

Definition. The straight line AB is called the *asymptote* of curve L if the distance MK (Fig. 297) from M (on L) to the straight line AB tends to zero as M recedes to infinity.

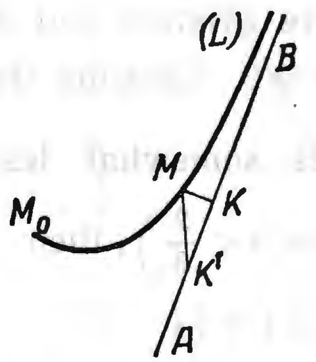


Fig. 297

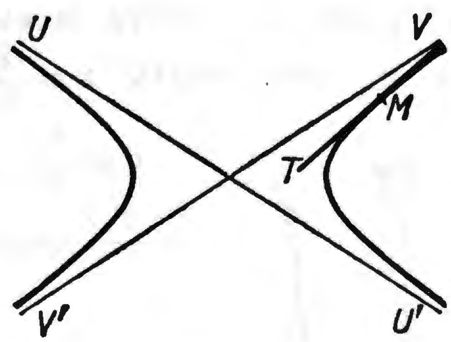


Fig 298

Note 1. The distance from M to AB may be measured over any *constant* direction MK' and not only along the perpendicular because if $MK \longrightarrow 0$, then $MK' \longrightarrow 0$ as well, and vice versa.

Note 2. The definition, given in Sec. 46, of the asymptotes of a hyperbola ($U'U$ and $V'V$ in Fig. 298) fits the general definition given here.

Note 3. Not every line along which a point recedes to infinity possesses an asymptote. For instance, neither the parabola nor the spiral of Archimedes has asymptotes.

285. Finding Asymptotes Parallel to the Coordinate Axes

1. **Asymptotes parallel to the axis of abscissas.** To find the horizontal asymptotes of a curve $y=f(x)$, seek the limits of $f(x)$ as $x \longrightarrow +\infty$ and as $x \longrightarrow -\infty$.

If $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=b$, then the straight line $y=b$ is an asymptote (in the case of infinite recession to the right; Fig. 299).

If $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b'$, then the straight line $y = b'$ is an asymptote (in the case of recession to infinity on the left; Fig. 300).

If $f(x)$ does not have a finite limit either as $x \longrightarrow +\infty$ or as $x \longrightarrow -\infty$, then the curve $y = f(x)$ has no asymptotes parallel to the x-axis.

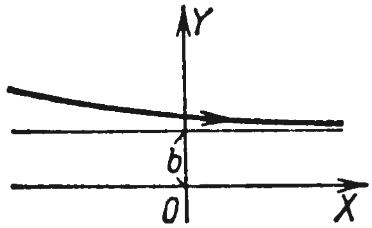


Fig. 299

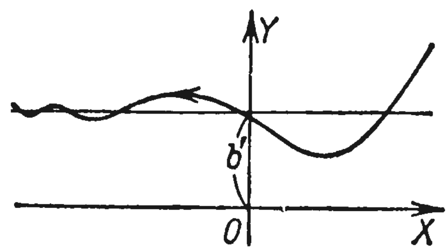


Fig. 300

Example 1. Find the asymptotes of the curve $y = 1 + e^x$ which are parallel to the x-axis.

Solution The function $1 + e^x$, as $x \longrightarrow +\infty$, does not have a finite limit $[\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^x) = +\infty]$ and tends to unity as $x \longrightarrow -\infty$ Therefore, the straight line $y = 1$ is an asymptote in the case of recession leftwards (Fig. 301).

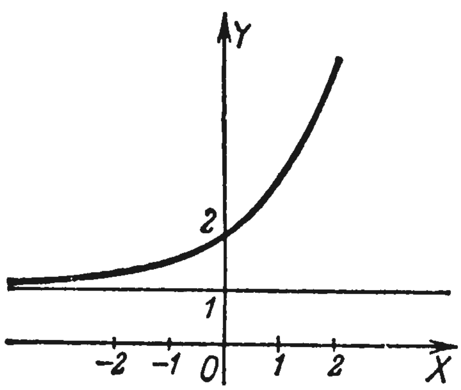


Fig. 301

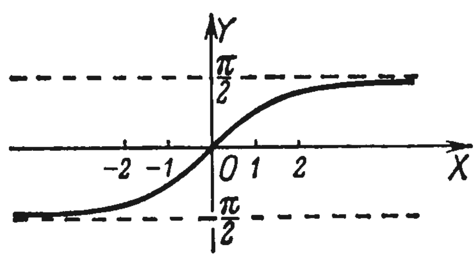


Fig. 302

Example 2. Find the horizontal asymptotes of the curve $y = \arctan x$.

Solution. We have

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

The straight lines $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ are asymptotes (Fig. 302).

2. **Asymptotes parallel to the axis of ordinates.** To find the

vertical asymptotes of a curve $y=f(x)$, it is necessary to find those values $x_1, x_2, x_3, \ldots$ of the argument x, where $f(x)$ has an infinite limit (one-sided or two-sided). The straight lines $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, ... will be the asymptotes. If $f(x)$ does not have an infinite limit for any value of x, then there are no vertical asymptotes.

Example 3. Let us consider the curve $y=\ln x$ (Fig. 303). The function $\ln x$ has an infinite limit on the right as $x \longrightarrow 0$

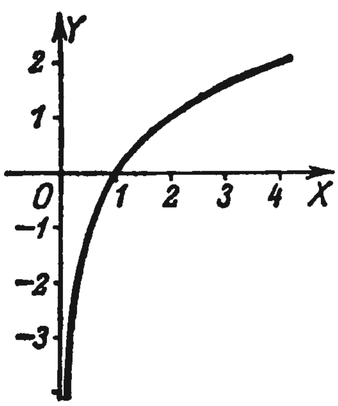


Fig. 303

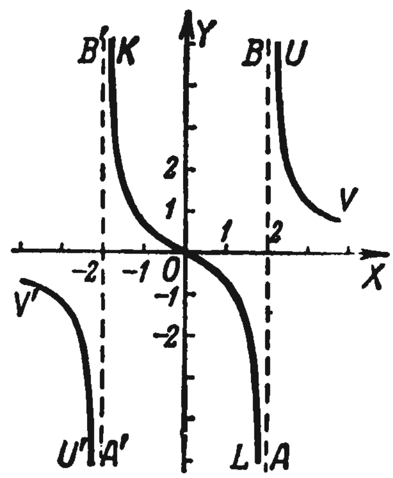


Fig. 304

$\left(\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty\right)$. The straight line $x=0$ (axis of ordinates) serves as asymptote in the case of recession to infinity downwards.

Example 4. Find the vertical asymptotes of the curve

$$y=\frac{2x}{x^2-4}$$

Solution. The function $\frac{2x}{x^2-4}$ has an infinite limit as $x \longrightarrow 2$ and $x \longrightarrow -2$.

Hence the straight lines

$$x=2 \text{ and } x=-2$$

(AB and $A'B'$ in Fig. 304) are asymptotes. The straight line AB serves as asymptote to two branches, UV and KL. Along the first, the recession to infinity is upwards, along the second, downwards $\left(\text{because } \lim\limits_{x \to 2+0} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty \text{ and } \lim\limits_{x \to 2-0} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty\right)$. Similarly for the straight line $A'B'$.

Note that the straight line $x=0$ serves as horizontal asymptote (for the branches UV and $U'V'$) (cf. Item 1).

286. Finding Asymptotes Not Parallel to the Axis of Ordinates [1]

To find the asymptotes of a curve $y=f(x)$ which are not parallel to the y-axis, it is necessary first to seek the $\lim \frac{f(x)}{x}$ as $x \longrightarrow +\infty$ and as $x \longrightarrow -\infty$. If there is no finite limit in both cases, then there are no asymptotes.

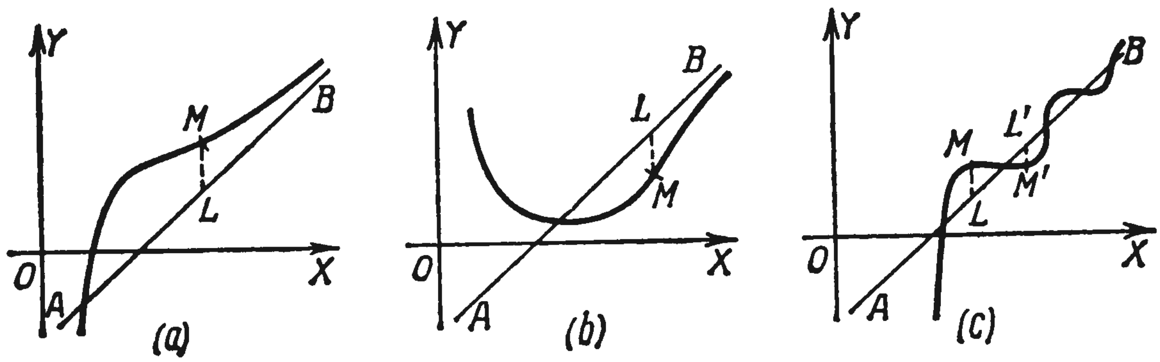


Fig. 305

But if $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = c$, then one must seek $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - cx]$. If this limit is equal to d, then the straight line $y=cx+d$ is an *asymptote in the case of recession to infinity on the right*. Similarly, if $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = c'$ and $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - c'x] = d'$, then the straight line $y=c'x+d'$ is an *asymptote in the case of recession leftwards*.

If the quantity $f(x)-cx$ [or $f(x)-c'x$] has no finite limit as $x \longrightarrow +\infty$ [as $x \longrightarrow -\infty$], then there is no corresponding asymptote.

The expression $f(x)-(cx+d)$ gives the vertical deviation LM (Fig. 305) of the given curve from its asymptote AB, the equation of which is $y=cx+d$.

If, as $x \to +\infty$, this expression does not change the plus sign from some instant onwards, then the point M approaches the asymptote AB from above (Fig. 305*a*), if the minus sign, then from below (Fig. 305*b*).

---

[1] The method described here reveals, for example, horizontal asymptotes (if they exist). But if we are interested only in horizontal asymptotes, then it is simpler to use the method of Sec. 285, Item 1. The method given here does not reveal vertical asymptotes.

If the sign changes, then the point M oscillates about the asymptote (Fig. 305c).

The same goes for the asymptote $y=c'x+d'$.

Example 1. Find the asymptotes of the hyperbola

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \tag{1}$$

Solution. Eq. (1) is associated with two single-valued functions:

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \tag{2}$$

and

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \tag{3}$$

Consider the first (to it correspond the infinite branches AN and $A'K'$, Fig. 306). We have

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=\frac{2}{3}\ (=c)$$

Further,

$$\lim_{x\to+\infty}(y-cx)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x\right)=0\ (=d)$$

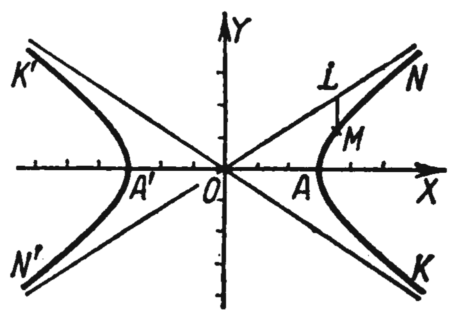


Fig. 306

Consequently, the straight line $y=\frac{2}{3}x$ is an asymptote to the branch AN.

The expression $y-(cx+d)=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x$ preserves the minus sign as $x\to+\infty$. Therefore the branch AN approaches the asymptote from below.

Then we find

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-\frac{2}{3}\ (=c'),$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-c'x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}+\frac{2}{3}x\right)=0\ (=d')$$

Thus, the straight line $y=-\frac{2}{3}x$ is an asymptote of the branch $A'K'$.

The expression $\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}+\frac{2}{3}x$ preserves the minus sign as $x\to-\infty$. Therefore, branch $A'K'$ also approaches the asymptote from below.

Investigating the function $y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ in this fashion (to it correspond the branches AK and $A'N'$), we find that the straight line $y=\frac{-2}{3}x$ is an asymptote to the branch AK, and the straight line $y=\frac{2}{3}x$ is an asymptote to the branch $A'N'$.

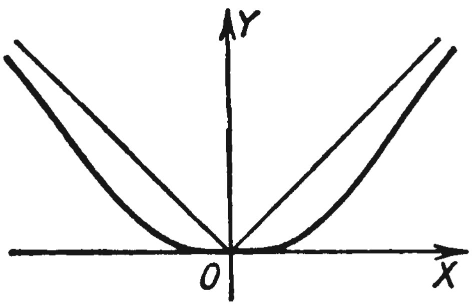


Fig. 307

Each of the branches AK, $A'N'$ approaches its asymptote from above.

Example 2. Find all the asymptotes of the curve

$$y=x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

The function $f(x)=x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ does not have an infinite limit for any value of x. Consequently, there are no asymptotes parallel to OY. To find asymptotes not parallel to OY, we first seek

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1 \quad (=c)$$

and then

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-cx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}+1}=0 \quad (=d)$$

Consequently, the straight line $y=x$ is the asymptote of the right infinite branch. Computing the same limits as $x\to-\infty$, we find $c'=-1$, $d'=0$, i.e. the left infinite branch has the asymptote $y=-x$ (Fig. 307).

287. Construction of Graphs (Examples)

The graph of a function given by the formula $y=f(x)$ is constructed by plotting points which are then connected by a smooth curve. However, if the points are taken haphazardly, one can easily make mistakes. [1]

---

[1] Thus, if we construct the graph of the function $y=\frac{1}{2}(x+2)^2\times\times(x-1)^2$ (see Fig. 308 below) by plotting the points F, B, L, K (which correspond to the values of the argument -2.5, -0.8, 0, 1.5), the graph will be completely wrong on the segment FB.

In order to draw the graph with extreme accuracy when only a few points are employed, it is useful first to determine its characteristic features. To do this, one has to:

1. Establish in what region the function $f(x)$ is defined and whether it has any discontinuities. Take into account the sign of $f(x)$ on the right and on the left for every infinite discontinuity; we obtain the vertical asymptotes of the graph (Sec. 285).

2. Find the first and second derivatives $f'(x)$, $f''(x)$, and also determine whether there are any points where $f'(x)$ or $f''(x)$ is nonexistent.

3. Find all extrema of the function $f(x)$ (Secs. 278 and 279); we obtain the highest points of crests and the lowest points of troughs.

4. Find all points of inflection (Sec. 283) and the inclination of the tangent line at these points.

5. Establish the existence of horizontal and inclined asymptotes (Sec. 286) if the range of the argument is infinite.

It is useful to tabulate these findings as they are obtained (see examples). Transferring them to a coordinate grid yields a general picture of the graph. A few intermediate points will suffice to yield a curve of sufficient accuracy.

Example 1. Construct the graph of the function [1]

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3$$

1. The function is defined and continuous everywhere, there are no vertical asymptotes.

2. We find

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2(5x+4),$$
$$f''(x)=(x-1)(10x^2+16x+1)$$

Both derivatives are finite and exist at all points.

3. To find extrema, solve the equation $f'(x)=0$. We find the critical values

$$x_1=-2,\ x_2=-0.8,\ x_3=1$$

Enter these values in the table and also enter the corresponding values of the function

$$f(x_1)=0,\quad f(x_2)\approx-4.20,\quad f(x_3)=0$$

[1] An advisable procedure is to compile a table while reading the examples.

Put zeros in the y' column.

It is convenient here to use the second derivative to examine for extrema, and so we postpone the investigation till Item 4.

4. To find the points of inflection, solve the equation $f''(x)=0$, which yields the earlier found value $x_3=1$ and, besides,

$$x_4=-1.5, \quad x_5=-0.07$$

Enter these values and also the corresponding values of the function and its first derivative:

$$f(x_4)=-2.0, \qquad f(x_5)=-2.3,$$
$$f'(x_4)=-5.5, \qquad f'(x_5)=4.0$$

Put zeros in the y'' column.

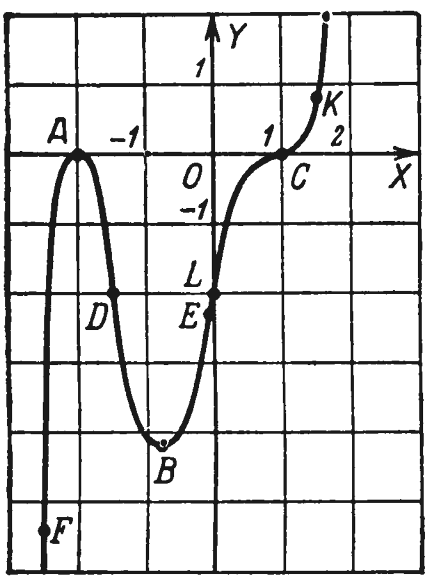


Fig. 308

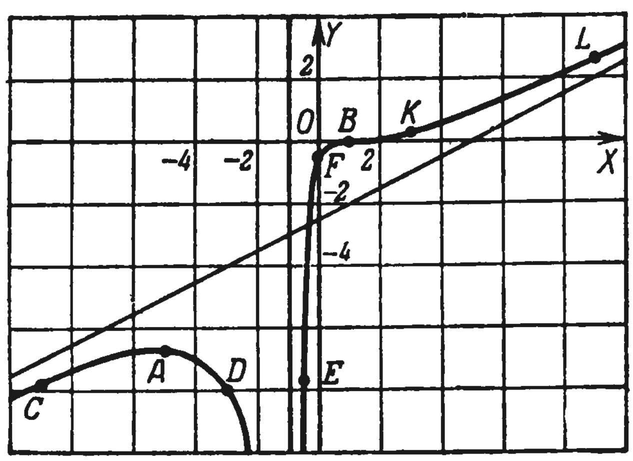


Fig. 309

Determine the sign of $f''(x)$ prior to and after transition through each of the values

$$x=x_3, \quad x=x_4, \quad x=x_5$$

and enter them in the appropriate places of the table. For example, in the third row of the y'' column the entry $-0+$ signifies that $f''(x)$ changes sign from minus to plus as it passes through $x=x_3$ from left to right. Since the second derivative changes sign at each of the points x_3, x_4, x_5, we have an inflection at each of the three points.

Now determine the signs of $f''(x)$ at the critical points $x_1=-2$ and $x_2=-0.8$:

$$f''(-2)<0, \quad f''(-0.8)>0$$

In the first row of the y'' column put a minus sign, and in the second a plus sign. We have a maximum for $x=x_1$ and a minimum for $x=x_2$.

5. There are no horizontal or inclined asymptotes because $\lim \frac{y}{x}=\infty$.

In Fig. 308 we plot the points we have found (A, B, C, D, E) and indicate the directions of the tangents. Adding another three points, $x_6=-2.5$, $x_7=0$, $x_8=1.5$ (F, L, K), we obtain a rather exact graph of the function.

Number of Point	x	y	y'	y''	Extremum, Inflection	Point Labels
1	−2	0	0	−	maximum	A
2	−0.8	−4.2	0	+	minimum	B
3	1	0	0	−0+	inflection	C
4	−1.5	−2.0	−5.5	−0+	inflection	D
5	−0.07	−2.3	4.0	+0−	inflection	E
6	−2.5	5.4	26			F
7	0	−2	4			L
8	1.5	0.8	5			K

Example 2. Construct the graph of the function $y=\frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

1. The function is defined and is continuous everywhere except at $x=-1$ where it has an infinite discontinuity. The function has a minus sign both on the right and on the left of the point of discontinuity (in the column y we write $-\infty$). We obtain the asymptote $x=-1$. Both infinite branches are directed downwards (Fig. 309).

2. We find

$$y'=\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}, \quad y''=12\frac{x-1}{(x+1)^4}$$

Both derivatives exist at all points except at the point of discontinuity.

3. The equation $f'(x)=0$ has two roots:

$$x_1=-5, \quad x_2=1$$

The corresponding values of y are

$$y_1=-6.75, \quad y_2=0$$

From the sign of $f'(x)$ near the critical points (see table below) we see that there is a maximum at the point $x=-5$ and there is no extremum at $x=1$.

4. The equation $y''(x)=0$ has a unique root $x_2=1$; the sign of the second derivative (see table) indicates an inflection there.

5. We seek inclined asymptotes; we have, as $x\to+\infty$ and as $x\to-\infty$,

$$\lim \frac{y}{x}=\frac{1}{2}, \quad \lim\left(y-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{5}{2}$$

Hence, the straight line $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ serves as asymptote for two infinite branches.

The right branch lies above the asymptote, the left below, since the expression $y-\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)$ preserves the plus sign as $x\to+\infty$ and the minus sign as $x\to-\infty$. Incidentally, this is evident from the drawing too when the points C, D, E, F, K, L are labelled.

Number of Point	x	y	y'	y''	Extremum, Inflection, Discontinuities	Point Labels
1	-1	$-\infty$			discontinuity	
2	-5	-6.75	$+0-$		maximum	A
3	1	0	$+0+$	$-0+$	inflection	B
4	-9	-7.81				C
5	-3	-8.00				D
6	-0.5	-6.75				E
7	0	-0.50				F
8	3	0.25				K
9	9	2.56				L

288. Solution of Equations. General Remarks

Algebraic equations of first and second degree are solved by the familiar formulas of algebra. For equations of third and fourth degree, the formulas are complicated, and the general equation of the fifth degree or a higher degree is not solvable in terms of radicals. However, both algebraic and nonalgebraic equations can be solved to the required accuracy if rough approximations are first found, which are then gradually refined.

A rough solution may be found graphically by one of the following methods.

First method. To solve an equation $f(x)=0$ construct a graph of $y=f(x)$ (see Sec. 287) and read off the abscissas of those points where the graph intercepts the x-axis.

Example 1. Solve the equation $x^3-9x^2+24x-18=0$.

Construct (Fig. 310) the graph of $y=x^3-9x^2+24x-18$; take the abscissas $x_1=1.3$, $x_2=3$, $x_3=4.7$. Substitution will show that the second root is exact, the first and third are approximate.

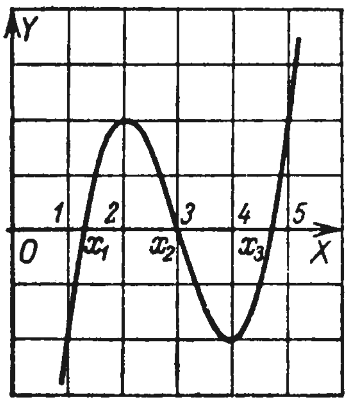


Fig. 310

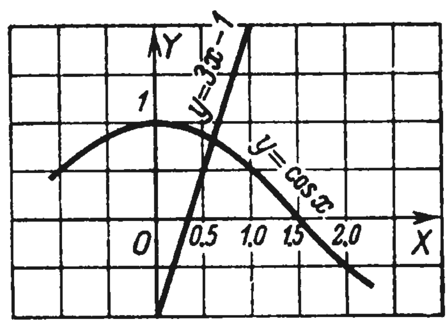


Fig. 311

Second method. The equation $f(x)=0$ may be given in the form $f_1(x)=f_2(x)$, where one of the functions $f_1(x)$, $f_2(x)$ is arbitrary. The arbitrariness is utilized so as to be able to construct the graphs of $y=f_1(x)$ and $y=f_2(x)$ in as simple a manner as possible. Find the points of intersection of the graphs. Reading off their abscissas, we get approximate values of the roots of the equation $f(x)=0$.

Example 2. Solve the equation $3x-\cos x-1=0$.

Give the equation in the following form:

$$3x-1=\cos x$$

Construct, as shown in Fig. 311, the graphs of the functions $y=3x-1$ and $y=\cos x$. They intersect in one point. Taking the abscissa, we get the approximate root $x_1=0.6$.

Secs. 289 to 291 indicate three methods for refining roots. They require that the desired root $\bar{x}$ be *isolated*, i.e. that some interval (a, b) (*interval of isolation*) be known to contain $\bar{x}$ and not to contain any other roots of the equation. The end-points a, b are themselves approximate values of the root (in defect and in excess). They may be found graphically by one of the above-indicated methods. The smaller the interval (a, b), the better.

Example 3. Isolate the roots of the equation $x^3-9x^2+24x-18=0$.

From the graph (Fig. 310), if it is a rough sketch, we read off the interval of isolation (1, 1.5) for the least root. In a more exact construction we get a smaller interval, say (1.2, 1.4). For the largest root we get the interval (4.6, 4.8). The root $x=3$ does not need to be isolated since it is exact.

Note. There are special methods of solving algebraic equations. Lobachevsky's method is worthy of particular mention: it permits, by means of algebraic operations on the coefficients of the equation, finding all roots, including imaginary ones, to any degree of accuracy. Lobachevsky's method does not require separation of roots.

289. Solution of Equations. Method of Chords

Suppose a function $f(x)$ has opposite signs at the end-points of an interval (a, b) (Fig. 312). If $f'(x)$ preserves sign[1] in (a, b), then there is a unique root $\bar{x}$ of the equa-

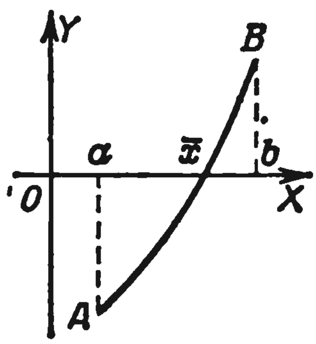


Fig. 312

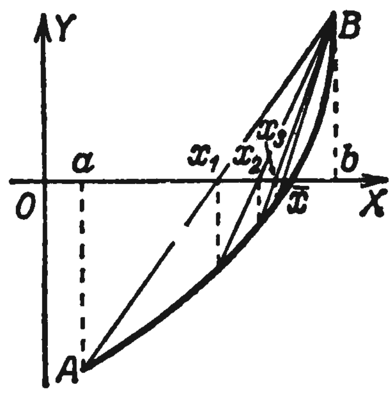


Fig. 313

tion $f(x)=0$ within the interval [if $f'(x)$ changes sign, then there is also a root, but it may not be the only one].

For the first approximation of the root $\bar{x}$ take the point $x=x_1$ where the chord AB (Fig. 313) intersects the x-axis:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)} \tag{1}$$

or, what is the same, [2]

$$x_1 = b - \frac{(b-a)\,f(b)}{f(b)-f(a)} \tag{2}$$

[1] This means that on AB the curve of the graph is everywhere up or everywhere down.

[2] In symmetric form $x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$, but formulas (1) and (2) are computationally more convenient.

Then compute $f(x_1)$ and take that one of the intervals (a, x_1), (x_1, b) at the end-points of which $f(x)$ has opposite signs [the interval (x_1, b) in Fig. 313]. The required root lies in this interval. Applying a formula similar to (1), we get the second approximation x_2. Continuing the process, we obtain a sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; the limit of this sequence is the required root $\bar{x}$.

The following is a practical procedure for determining the degree of approximation. Let it be required to obtain an accuracy up to 0.01. We then stop at the approximation x_n which differs from the preceding one by less than 0.01. Incidentally, it may be (though this is highly improbable) that the accuracy will prove to be in defect. The guarantee will be complete if we are convinced that $f(x_n)$ and $f(x_n \pm 0.01)$ have opposite signs.

Example. The function $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$ has opposite signs at the end-points of the interval (3, 4):

$$f(3)=-10<0, \quad f(4)=9>0$$

The derivative $f'(x)=3x^2-4x-4$ preserves the plus sign over the interval (3, 4). Hence, within (3, 4) there is one root of the equation

$$x^3-2x^2-4x-7=0$$

Let us find it to within 0.01. Formula (1) yields

$$x_1=3-\frac{1\cdot(-10)}{9-(-10)}=3+\frac{10}{19}\approx 3.53$$

We now compute

$$f(3.53)\approx -2.05$$

Of the two intervals (3, 3.53) and (3.53, 4) we choose the second because the signs of $f(x)$ are opposite at the end-points.

We find the second approximation:

$$x_2=3.53-\frac{0.47\cdot f(3.53)}{f(4)-f(3.53)}\approx 3.53+\frac{0.47\cdot 2.05}{11.05}=3.62$$

The value of

$$f(3.62)=-0.24$$

is negative, and so we take the interval (3.62, 4) and find

$$x_3\approx 3.62+\frac{0.38\cdot 0.24}{9.24}=3.63$$

and

$$f(3.63)=-0.04$$

As the computation proceeds we should expect that x_4 will differ from x_3 by less than 0.01 and that x_3 yields the desired approximation. Since to obtain a complete guarantee, we will compute $f(3.64)$ anyway, we will not determine x_4 and straight off find

$$f(3.64)=0.17$$

The signs of $f(3.63)$ and $f(3.64)$ are opposite, and so x_3 is the desired approximation.

Note. The method of chords, like all methods of successive approximation, "does not fear errors". an error in an intermediate computation will automatically be rectified in the next step. But the final computation must be carried out with extreme care. To avoid errors in rounding off operations, it is useful to retain extra digits.

290. Solution of Equations. Method of Tangents

At the end-points of the interval (a, b) let a function $f(x)$ have opposite signs (Figs. 314 and 315), and let the derivatives $f'(x)$, $f''(x)$ preserve sign in the interval (a, b).[1] To

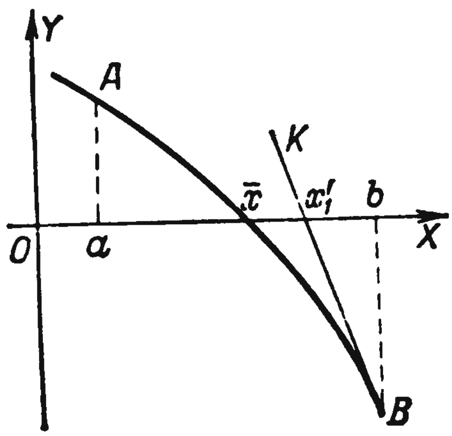


Fig. 314

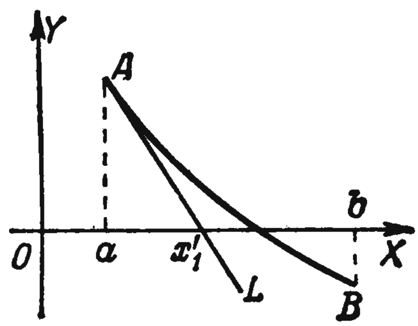


Fig. 315

find the root $\bar{x}$ which lies inside the interval (a, b) (Sec. 289), do as follows.

At the end of the arc AB where the signs of $f(x)$ and $f''(x)$ are the same,[2] draw a tangent (BK in Fig. 314, AL in Fig. 315). For the first approximation of the desired root,

[1] That is, on segment AB the curve of the graph is always up or always down and everywhere concave up or concave down.

[2] At the upper end if AB is concave up, and the lower end if AB is concave down.

take the point $x=x_1'$ [1] where the tangent crosses the x-axis. If the tangent is taken at the point $x=b$, then

$$x_1'=b-\frac{f(b)}{f'(b)} \tag{1}$$

but if it is taken at $x=a$, then

$$x_1'=a-\frac{f(a)}{f'(a)} \tag{2}$$

In both cases the second approximation is found by the formula

$$x_2'=x_1'-\frac{f(x_1')}{f'(x_1')} \tag{3}$$

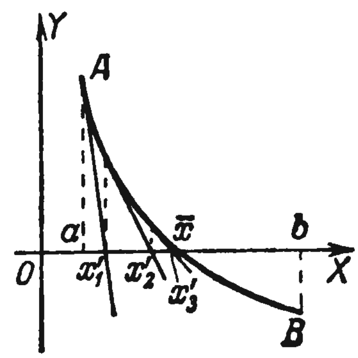


Fig. 316

Continuing the process we find, in succession, $x_1', x_2', x_3', \ldots$ (Fig. 316) The sequence has as its limit the required root $\bar{x}$. The degree of approximation may be determined in the same way as in the method of chords.

Note 1. If a tangent is drawn at the end of the arc where $f(x)$ and $f''(x)$ have opposite signs, then x_1 may go beyond the interval (a, b) and thus worsen the approximations (Fig. 317a).

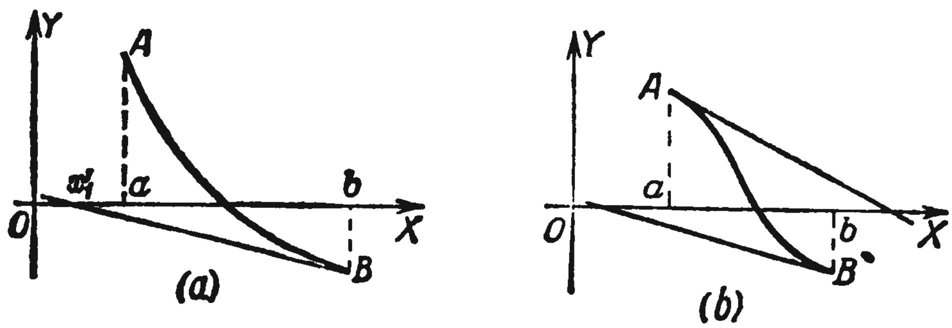


Fig. 317

Note 2. If $f''(x)$ changes sign in (a, b), then the tangents at both ends of the arc can cross the x-axis outside the interval (Fig. 317b).

Example. Compute to within 0.01 the root of the equation

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0$$

which lies (see Example, Sec. 289) in the interval (3, 4).

---

[1] The labels $x_1', x_2', \ldots$ are used to distinguish approximations obtained by the method of tangents from the approximations $x_1, x_2, \ldots$ obtained by the method of chords.

Solution. We have

$$f(3) = -10, \quad f(4) = 9,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4, \quad f''(x) = 6x - 4$$

Both derivatives preserve the plus sign in the interval (3, 4). And so we take that end of the interval where $f(x) > 0$, i.e. $b = 4$. From formula (1) we find the first approximation:

$$x'_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} \approx 3.68$$

Then we find

$$f(3.68) = 1.03, \quad f'(3.68) = 21.9$$

and from formula (3) we obtain the second approximation:

$$x'_2 = 3.68 - \frac{f(3.68)}{f'(3.68)} = 3.68 - 0.047 = 3.633 \quad \text{(in excess)}$$

Subsequent approximations will be less and less, but as we proceed in the computations it may be foreseen that further refinements of the root will not affect the hundreds digit. We therefore confine our computations to $f(3.633)$ and $f(3.630)$. This yields

$$f(3.633) = 0.020, \quad f(3.630) = -0.042$$

so that (to an accuracy three times that required) $\bar{x} = 3.63$.

291. Combined Chord and Tangent Method

Carrying out the conditions of Sec. 290, we see that the approximations of x_n (by the method of chords) and the approximations of x'_n (by the method of tangents) approach the root $\bar{x}$ from opposite directions (the former from the direction of concavity, the latter from the direction of convexity of the graph; see Fig. 318). A joint application of the two methods yields, at once, excessive and defective approximations, and the degree of accuracy estimated directly.

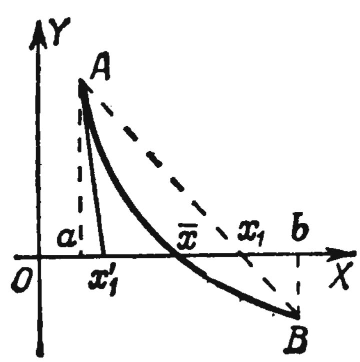


Fig. 318

Let a be that end of the interval (a, b) where the signs of $f(x)$ and

$f''(x)$ are the same. Then by formulas (1), Sec. 289, and (2), Sec. 290, we find [1]

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{1}$$

The required root lies between x_1 and x_1'. Here $f(x_1')$ has the same sign as $f''(x_1')$ (see Fig. 318). Hence we can again use formulas (1) of this section by substituting x_1 for a and x_1' for b. This yields the second approximations:

$$x_2 = x_1' - \frac{(x_1 - x_1')f(x_1')}{f(x_1) - f(x_1')},$$

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}$$

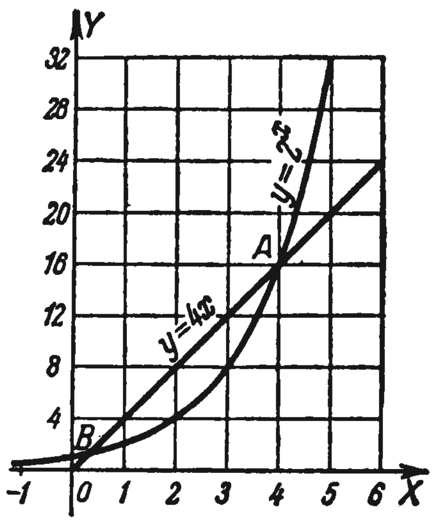


Fig. 319

Use the same formulas for computing x_3, substituting in them x_2 for x_1 and x_2' for x_1' and so on. Continuing this process we find $\bar{x}$ to the desired degree of accuracy.

Example. Solve the equation $2^x = 4x$.

By the second method of Sec. 288, we construct the graphs of $y = 2^x$ and $y = 4x$ (Fig. 319). Besides point A, which yields the exact root $x = 4$, we obtain only one point B of intersection. Its abscissa $\bar{x}$ lies between $a = 0$ and $b = 0.5$.

Compute $\bar{x}$ to within 0.0001. We have

$$f(x) = 2^x - 4x, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 - 4, \quad f''(x) = 2^x \ln^2 2, \quad f(0) = 1,$$
$$f(0.5) = -0.586$$

In the interval (0, 0.5) the first derivative preserves the minus sign, [2] the second derivative, the plus sign. To compute x_1', take the end-point $a = 0$ because the signs of $f(x)$

---

[1] For the case when the signs of $f(x)$ and $f''(x)$ are the same at the end-point b the second formula is replaced by the formula $x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$

[2] From the figure it is clear that in the interval (0, 0.5) the inclination of $y = 2^x$ is less than that of the graph $y = 4x$.

and $f''(x)$ there are the same. We find

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{0.5\cdot 1}{0.586+1} \approx 0.316 \text{ (in excess)}$$

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{1}{\ln 2 - 4} = -\frac{1}{0.69315-4} \approx 0.302 \text{ (in defect)}$$

Using five-place tables of logarithms, we obtain

$$f(0.302) = 0.0249,\ f'(0.302) = -3.14544,$$
$$f(0.316) = -0.0191$$

This yields the second approximations:

$$x_2 = 0.302 - \frac{0.014\cdot f(0.302)}{f(0.316)-f(0.302)} = 0.302 + 0.0079 = 0.3099$$
(in excess)

$$x_1' = 0.302 - \frac{f(0.302)}{f'(0.302)} = 0.302 + 0.0079 = 0.3099 \quad \text{(in defect)}$$

The required root $\bar{x}$ lies in the interval (x_2', x_2) and therefore $\bar{x} = 0.3099$ at least to within $0.5\cdot 10^{-4}$. Actually the accuracy is still greater (using seven-place tables of logarithms, we obtain, for the same values of x_1, x_1', the following boundaries of $\bar{x}$: 0.30990 and 0.30991).

หลังจากที่ท่านพลอากาศเอก พิสุทธิ์ ฤทธาคนี ได้ถึงแก่กรรมลงแล้ว ข้าพเจ้าในนามของ ครอบครัว ฤทธาคนี ขอกราบขอบพระคุณ ท่านเจ้าภาพที่ให้เกียรติมาร่วมทำบุญและเป็นเจ้าภาพร่วมในการสวดพระอภิธรรมศพท่านดังนี้

วันที่ ๑๒ ธันวาคม ๒๕๓๔	- เตรียมทหารบกรุ่นที่ ๕
	- วิทยาลัยป้องกันราชอาณาจักร รุ่นที่ ๑๖
	- พล.อ.อ.วาทิต-ถวัลย์รัตน์ โหละสุต
	- นนอ. รุ่นที่ ๒
	- กองการศึกษาโรงเรียนนายเรืออากาศ
	- บริษัทวิทยุการบินแห่งประเทศไทย
วันที่ ๑๓ ธันวาคม ๒๕๓๔	- พล.อ.อ.เกษตร-คุณหญิงวันทนา โรจนนิล
	- ชุนนุมนักเรียนนายเรืออากาศ
	- โรงเรียนนายเรืออากาศ
	- ตระกูลศิริเวช
	- ศูนย์วิทยาศาสตร์และพัฒนาระบบอาวุธฯ กองทัพอากาศ
	- บริษัท การบินไทย จำกัด
	- กองสูติกรรม โรงพยาบาลภูมิพลอดุลยเดช
วันที่ ๑๔ ธันวาคม ๒๕๓๔	- นางประดับ ฤทธาคนี และลูก ๆ
วันที่ ๑๕ ธันวาคม ๒๕๓๔	- ภรรยา น้อง บุตร หลานและญาติ ๆ

ขอกราบขอบพระคุณทุก ๆ ท่านที่ส่งพวงหรีดและดอกไม้มาเพื่อเคารพศพท่านฯ ตลอดจนทุก ๆ ท่านที่มาในงานสวดพระอภิธรรมในครั้งนี้ อนึ่งขอขอบพระคุณ กองทัพอากาศ และกรมสวัสดิการทหารอากาศ ในความช่วยเหลือทางด้าน พิธีการจัดการศพ และอื่น ๆ ขอขอบพระคุณ นอ.อนุรักษ์ โพธิ์อุบล และ นอ.อวยชัย แจ้งเร็ว ในการติดต่อประสานงานกับหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งงานหนังสือเล่มนี้ด้วย บรรดาเพื่อนสนิทและบรรดาลูกศิษย์ของท่านที่มีน้ำใจให้ความช่วยเหลือในทุก ๆ ด้าน และท้ายสุดนี้ ขอขอบพระคุณญาติมิตรทุก ๆ ท่านแห่งตระกูลฤทธาคนี

เรืออากาศเอกฟ้าฟื้น ฤทธาคนี